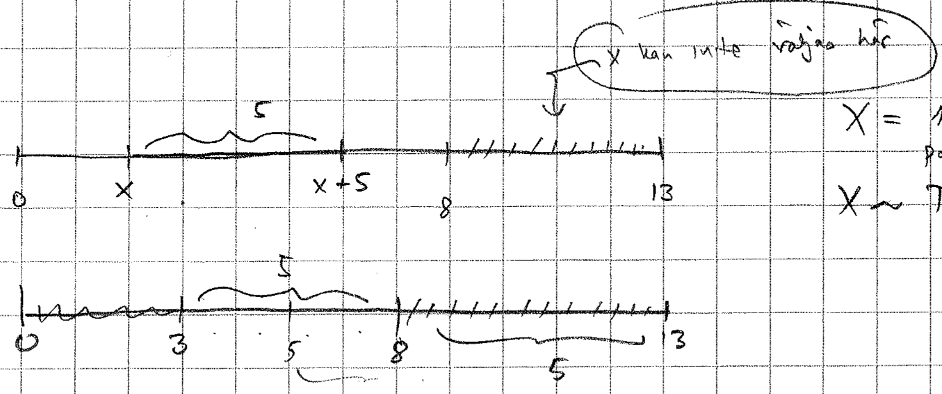
Exempel 2.13 En bil med längden 5 m. parkeras på måfå på en gata med längden 13 m. Vilken är s.l. att en annan bil med längden 5 m. kan parkera på samma gata ?



X = 1. koordinaten x på 1. bilen. $\Rightarrow$

$X \sim Tas(0,8)$.

$$\Rightarrow P(\text{2. bilen kan parkera}) = P\big(\{0 \le X \le 3\} \cup \{5 \le X \le 8\}\big)$$

$$\overset{\text{disjunkta}}{=} P(0 \le X \le 3) + P(5 \le X \le 8) = \underbrace{\int_0^3 \frac{1}{8}\,dx}_{\frac{3}{8}} + \underbrace{\int_5^8 \frac{1}{8}\,dx}_{\frac{3}{8}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$\square$

5/2/2015

OBS samband mellan $Tas(0,1)$ och $Tas(a,b)$: $X: \Omega \to \mathbb{R}$ s.v.

$$X \sim Tas(0,1) \iff (b-a)X + a \sim Tas(a,b).$$

avser avbildningen $\omega \mapsto (b-a)X(\omega) + a$

B. Exponentfördelningen

om $\lambda > 0 \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ uppfyller villkoren för frekvensf.:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\Big/_0^c \lambda e^{-\lambda x}\right)$$

$$= \lim_{c\to\infty}\Big[1 - \underbrace{e^{-\lambda c}}_{\frac{1}{e^{\lambda c}} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0}\Big] = 1.$$

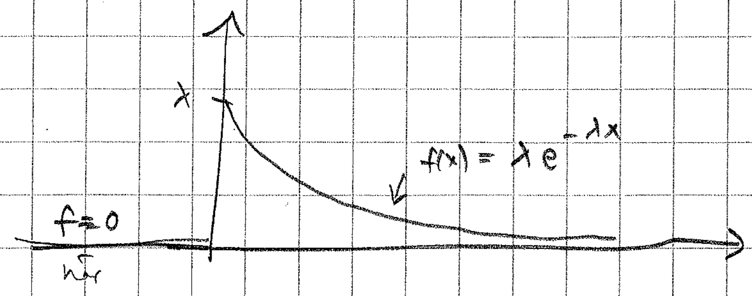
Def S.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ är exponentfördelad med parameter λ (där $\lambda > 0$), om X har kontinuerlig fördeln. med frekvensfunktionen

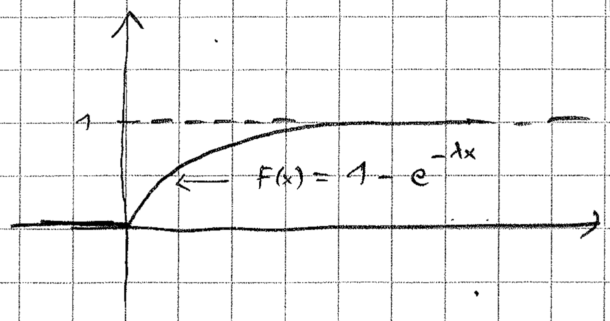
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Beteckna: $X \sim Exp(\lambda)$

Fördelningsfunktionen $F = F_X$ satisfierar:

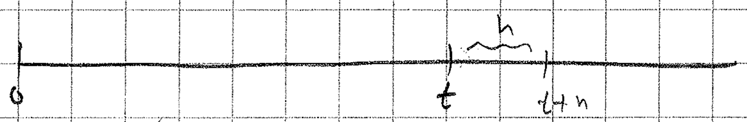
$$\begin{cases} x \le 0 \Rightarrow F(x) = 0 \\ x > 0 \Rightarrow F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -\Big/_0^x \lambda e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$





typisk <u>tillämpning</u> av $X \sim Exp(\lambda)$:

X = <u>livslängden</u> för objekt (= apparat, atom, ...) räknat från $t=0$



<u>anta</u>
- objektet "existerar" (= fungerar) då $t=0$, dvs. $P(X>0) = 1$.
- objektet "åldras" inte i följande bemärkelse:
  betingade sannolikheten att objektet fungerar vid tiden $t+h$, <u>förutsatt</u> att objektet fungerar vid tidpunkten t, beror <u>endast</u> av h; dvs.

$$(1) \qquad P(X > t+h \mid X > t) = P(X > h), \quad \text{då } t \geq 0,\ h > 0.$$

$\{\omega : X(\omega) > t+h\}$ etc.

<u>Markov</u>-egenskap, (= avsaknad av minne)

Egenskap (1) karakteriserar $X \sim Exp(\lambda)$:

extra info (kan visa)

<u>Sats 2.14</u> Låt $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vara en <u>kontinuerlig</u> s.v. så att $X(\omega) \geq 0$ för $\omega \in \Omega$.

Då har X egenskapen (1)

$$\Longleftrightarrow \quad X \sim Exp(\lambda), \quad \text{för något } \lambda > 0.$$

inte 2015

<u>Bevis</u> "$\Leftarrow$" anta $X \sim Exp(\lambda)$. $\Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

$$P(X > t+h \mid X > t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{P(\overbrace{X > t+h \text{ och } X > t}^{X > t+h})}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)}$$

$$\boxed{\text{def. } P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

$$= \frac{P(\{X \leq t+h\}^c)}{P(\{X \leq t\}^c)} \overset{\text{komplement}}{=} \frac{1 - P(X \leq t+h)}{1 - P(X \leq t)}$$

$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+h)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = 1 - \underbrace{(1 - e^{-\lambda h})}_{P(X \leq h)} \overset{\text{komplement}}{=} P(X > h)$$

"$\Rightarrow$" se Tuominen, s. 60. $\square$

Exempel 2.15. Livslängden X för en elektronisk apparat satisfierar $X \sim \operatorname{Exp}(\frac{1}{10})$. Vilken är sl att apparaten fortfarande fungerar efter 100 tidsenheter (timmar, dagar, månader etc)?

Lösn

$$P(\text{fungerar}) = P(\underbrace{X > 100}_{\{\omega : X(\omega) \le 100\}^c}) \overset{\text{komplement}}{=} 1 - \underbrace{P(X \le 100)}_{X \sim \operatorname{Exp}(\frac{1}{10}),\ \lambda = \frac{1}{10}}$$

$$\overset{\text{s. 67}}{=} 1 - F_X(100) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 100}) = e^{-10} \left(< \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \right).$$

$\square$

20.10

* C. Standard normal fördelningen

(D II) Vektoranalys $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1$ om $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ kontinuerlig i $\mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$. se s. $69\frac{1}{2}$

OBS $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$ saknar explicit integralfunktion

Def: Stok. variabeln $X : \Omega \to \mathbb{R}$ är (standard) normalfördelad (eller gaussiskt f.) om X har en kontinuerlig fördelning med frekvensfkt

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

OBS: centralt!

Beteckna: $X \sim N(0,1)$

Fördelningsfunktionen betecknas

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}$ saknar explicit integralfunktion $\Rightarrow$ värden $\Phi(x)$ från tabell (beräknas genom approximation, exempelvis Taylor serie för $\varphi(x) = \ldots$).

se tabell: [T] (sista sidan)

$\varphi(-x) = \varphi(x)$ jämn funktion $\Rightarrow$ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, eftersom påminn räknetrick: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \lambda$?

Vektoranalys

$$\lambda^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

2-dim integral
polära koordinater
(variabelsubstitution)

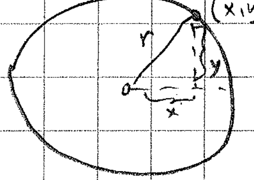
$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 0 \le r < \infty \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \qquad \text{Jakobian} = r \;\Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,dr\,d\varphi \overset{(*)}{=} 2\pi \Big[-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big]_0^{\infty} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \sqrt{2\pi}$$

$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$



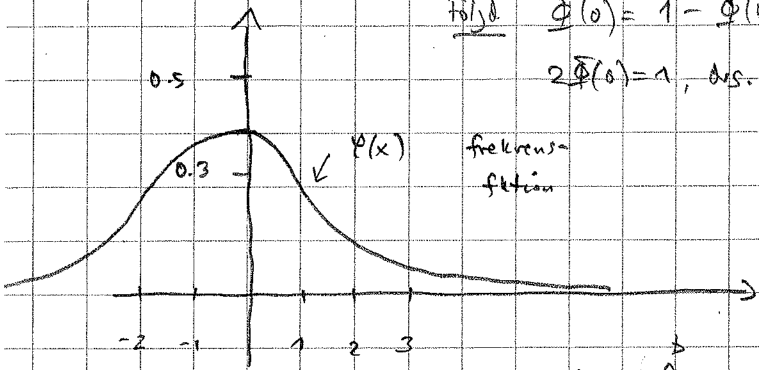
(*) eftersom $\displaystyle\frac{d}{dr}\left(e^{-r^2/2}\right) = -r\cdot e^{-r^2/2}$

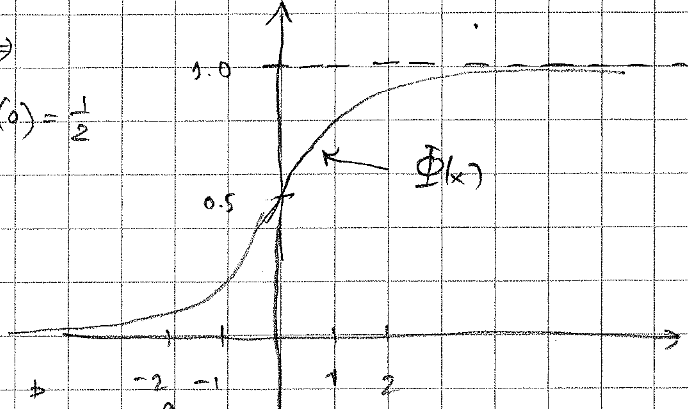
orsak:
$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,dt \overset{t\mapsto -t}{=} -\int_{\infty}^{x} \underbrace{\varphi(-t)}_{\varphi(t)}\,dt = \int_{x}^{\infty} \varphi(t)\,dt$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = 1 - \Phi(x) \quad \left(\text{eftersom } 1 = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt + \int_{x}^{\infty} \varphi(t)\,dt\right).$$

Följd: $\Phi(0) = 1 - \Phi(0) \Rightarrow$

$2\Phi(0) = 1$, d.v.s. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$





Påminn: $P(a \le X \le b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \forall a<b.$

* D. Allmänna normalfördelningen

Låt $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Stok. variabeln $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ är normalfördelad med parametrarna μ, σ^2 om

$$X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Här är $X(\omega) = \frac{Y(\omega)-\mu}{\sigma}$, $\omega \in \Omega$. (som avbildning $\Omega \to \mathbb{R}$) Beteckna: $\boxed{Y \sim N(\mu, \sigma^2)}$

Sats 2.16 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ om och endast om Y har kontinuerlig fördelning med frekvensfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fördelningsfunktionen till Y är

$$F_Y(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

(där Φ = fördelningsfunktionen till normalfördelade $X \sim N(0,1)$).

Bevis: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$Y(\omega) \le x \iff \frac{Y(\omega)-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall x \iff$$

$\Longleftrightarrow \quad X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

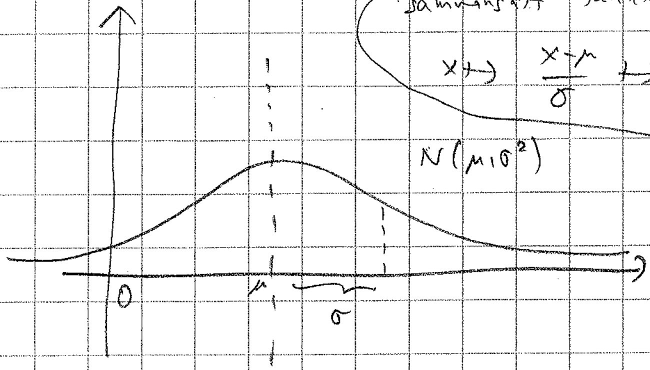
(minnesregel)

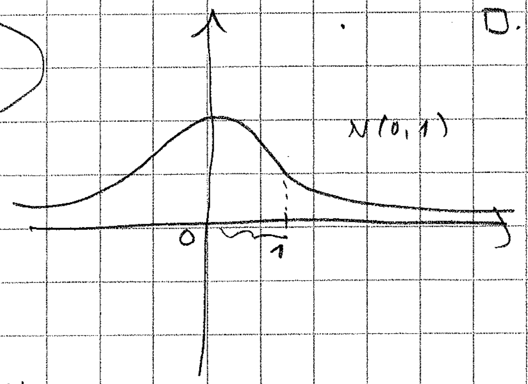
frekvensfunktionen

$$f(x) = F_Y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) = \underbrace{\Phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}_{\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

sammansatt funktion $x \mapsto \frac{x-\mu}{\sigma} \mapsto \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ — inre derivata

$\square$.





OBS sambandet $Y \sim N(\mu,\sigma^2) \Longleftrightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ används till att reducera beräkningar för $N(\mu,\sigma^2)$ s.v. till $N(0,1)$ s.variabler.

Exempel 2.17 Anta $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$. Bestäm x så att

$\boxed{\text{2015 endast del (i)}}$

(i) $P\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right) = 0.05$ — obs händelse $\left\{\omega : \left|\frac{Y(\omega)-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right\}$

(ii) $P\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right) = 0.01$

Ex. 2.17* se 71A

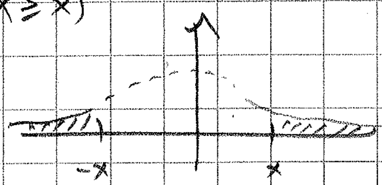
(iii) $P\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right) = 0.001$

Lösn. $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ standard fördelad $\Rightarrow$

disjunkta: $|X(\omega)| \geq x \Longleftrightarrow X(\omega) \geq x$ eller $X(\omega) \leq -x$

$$P\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right) = P(|X| \geq x) = P(X \leq -x) + P(X \geq x)$$

$$= \underbrace{\Phi(-x)}_{\text{symmetri } 1-\Phi(x)} + 1 - \Phi(x) = 2(1-\Phi(x))$$



alltså: $P\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right) = p \Longleftrightarrow 2(1-\Phi(x)) = p \overset{\text{lös}}{\Longleftrightarrow} \Phi(x) = 1 - \frac{p}{2}$

Tabell [T]: (i) $p = 0.05 \Leftrightarrow 1 - \frac{p}{2} = 0.975 = \Phi(x_0)$ om $x_0 \approx 1.96$.

alltså

$$P\left(\left|\frac{Y-\mu}{\sigma}\right| \geq x\right) = 0.05 \quad \text{om} \quad x \approx 1.96$$

(ii) $p = 0.01 \Longleftrightarrow 1 - \frac{p}{2} = 0.995 = \Phi(x_1)$ om $x_1 \approx 2{,}58$

(iii) $p = 0.001 \Longleftrightarrow 1 - \frac{p}{2} = 0.9995 = \Phi(x_2)$ om $x_2 \approx 3.29$

$\square$

Exempel 2.17* På grund av mätfel bildar mätningar av en storhet $\mu \in \mathbb{R}$ en normalt fördelad s.v. $\omega \mapsto Y(\omega)$ där $Y \sim N(\mu, 1)$.

Vilken är sannolikheten att mätfelet $\leq \frac{1}{100}$, dvs beräkna sannolikheten

$$P\Big(\{\omega : \underbrace{|Y(\omega) - \mu|}_{\text{mätfel}} \leq \tfrac{1}{100}\}\Big) \quad ?$$

Lösn antagandet betyder att s.v. $X = Y - \mu \sim N(0,1)$ (fallet $\sigma^2 = 1$)

Vi söker

$$P\Big(|Y-\mu| \leq \tfrac{1}{100}\Big) = P\Big(|X| \leq \tfrac{1}{100}\Big) = P\Big(-\tfrac{1}{100} \leq X \leq \tfrac{1}{100}\Big)$$

$$\stackrel{\text{tidigare}}{=} \Phi\Big(\tfrac{1}{100}\Big) - \underbrace{\Phi\Big(-\tfrac{1}{100}\Big)}_{1-\Phi(\frac{1}{100})} = 2\Phi\Big(\tfrac{1}{100}\Big) - 1$$

tabell över Φ

$$\approx 2\cdot(0.503989) - 1 = 1.007978 - 1 = \underline{0.007978}$$

$\square$

OBS Exempel 3 visar att en fördelning $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ är relativt "koncentrerad omkring μ".

~~Exempel 4 Mellanförhör med 100 personer, poäng 0 – 24 p.~~

~~Låt X = poängtalet för given person. Anta att $X \sim N(12, 5^2)$~~

~~Bestäm så att en godtycklig person får åtminstone 10 poäng.~~

~~Lösn.~~

~~$$P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-12}{5} \geq \frac{10-12}{5}\right) = P\Big(\underbrace{\frac{X-12}{5}}_{\sim N(0,1)} \geq -\frac{2}{5}\Big)$$~~

~~$$= 1 - \underbrace{\Phi(-0.4)}_{\text{symm. } 1-\Phi(0.4)} = \Phi(0.4) \approx 0.655\ldots$$~~ ~~tabell~~ $\Box$.

· X har diskreta värden $\Rightarrow$ $X \not\sim N(12, 5^2)$ endast som "approximation".

Fråga: varför är normalfördelningarna $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ centrala?

svar

Senare: (i) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p) \Rightarrow \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$ approximativt (där $q = 1-p$)

(de Moivre – Laplace 4.2)

(ii) (centrala gränsvärdessatsen, 4.1) (+ extra villkor)

$X = X_1 + \ldots + X_n$, X_j oberoende stokastiska variabler $\Rightarrow$

$X \sim$ normalfördelad approximativt

Kommentar: Det finns många fler användbara kontin. fördelade s.v. X !

2.4. Väntevärdet för kontinuerliga fördelningar

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum. Anta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ stokastisk var. med kontinuerlig fördelning och frekvensfkt. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Väntevärdet till X är

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx,$$

förutsatt att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x| f(x)}_{\geq 0}\,dx < \infty$ (dvs. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ konvergerar absolut som oegentlig Riemann integral).

X saknar väntevärde om $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx = \infty$ (dvs. integralen divergerar)

Exempel 2.18

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{om } x \geq 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\Big/_1^\infty \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow f \quad \text{"frekvensfunktion"}$$

om s.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ kont. fördelad med frekvens-fkt $f \Rightarrow X$ saknar väntevärde:

$$\int_1^\infty x\, f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \Big/_1^\infty \log x = \infty$$

$\square$.

Väntevärden för kont. fördelningar (A) — (D.) ; 2.3.

Sats 2.19 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl.-rum, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ s.v. Då gäller

(i) om $X \sim \text{Tas}(a,b) \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$

(ii) $X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$

(iii) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu$ (alltså: μ = "medeltal" för s.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$).

specialfall: $X \sim N(0,1) \Rightarrow E(X) = 0$.

11/2/2015

Bevis: (i)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \Big/_a^b \frac{x^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2(b-a)}\big[\underbrace{b^2 - a^2}_{(b-a)(b+a)}\big] = \frac{a+b}{2}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

(ii)

$$E(X) = \int_0^\infty x \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f(x),\ x \geq 0}\,dx = \lambda \int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{-\lambda x}}_{v'}\,dx \overset{\text{partiell integr.}}{=}$$

$$\lambda \underbrace{\Big/_0^\infty -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}}_{=0} + \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}\Big/_0^\infty e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\boxed{\text{kom ihåg: } \lim_{x\to\infty} x e^{-\lambda x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = 0 \quad (\lambda > 0) \quad \text{DI}}$$

(iii) anta först $X \sim N(0,1) \Rightarrow$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{= h(x)}\,dx = 0$$

eller direkt: $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \lim_{d\to\infty} \int_0^d x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$= \lim_{c\to-\infty} \Big/_c^0 \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \lim_{d\to\infty} \Big/_0^d \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = 0$

eftersom $x > 0 \Rightarrow h(-x) = -x\, e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = -x e^{-\frac{1}{2}x^2} = -h(x) \Rightarrow h$ "udda" funktion

(OBS: $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{0} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \infty$ direkt integrering)

se s. $69\frac{1}{2}$

$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ frekvens-fkt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

74

$$\Rightarrow \quad E(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t+\mu)\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

substitution: $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$, $x = \sigma t + \mu$, $dx \mapsto \sigma\, dt$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma t e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=0 \ // (s.73)} + \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\sqrt{2\pi}} = \mu .$$

$\square$

25.10.

2015 kort kommentar

2.5. Allmän teori för stokastiska variabler

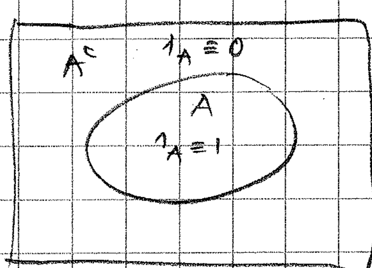
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Sl-rum.

Påminn $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (reell-värd) stokastisk variabel (s.v.), om

$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exempel 2.20 anta $A \in \mathcal{F}$ händelse

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$



$1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ indikator (= karakteristisk funktion) till A.

1_A stokastisk variabel:

$$\{\omega : 1_A(\omega) \le x\} = \begin{cases} \emptyset & \text{om } x < 0 \\ A^c & \text{om } 0 \le x < 1 \\ \Omega & \text{om } x \ge 1 \end{cases}$$

Fördelningsfunktionen $F = F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ till s.v. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ är

$$F(x) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

OBS i allmänhet är en s.v. X varken diskret (kap. 2.1) eller kontinuerligt fördelad (kap. 2.3).

Exempel: s. $74\frac{1}{2}$

allmän egenskaper av f.f.

Sats Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Sl-rum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v., $F = F_X$ dess fördelningsfkt. Då gäller:

(i) $P(X > x) = 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}$

exempel på s.v. som <u>varken</u> diskret eller kontinuerlig.

<u>Exempel 2.21</u> Ett symmetriskt mynt singlas

utfall $\begin{cases} \text{klave} \\ \text{om krona} \end{cases}$ $\Rightarrow$ välj reellt tal $x \in (0,1)$ likformigt på måfå

utfallsrum $\Omega = \{\text{klave}\} \cup \{(\text{krona}, x) : x \in (0,1)\}$

definiera $X : \Omega \to R$ avbildning

$X(\{\text{klave}\}) = -1, \quad X((\text{krona}, x)) = x$

$\Rightarrow$ X s.v. , X varken diskret eller kontinuerlig.

<u>orsak</u> $P(X = -1) = \frac{1}{2} > 0$ (inte för kont. fördelade s.v.)

icke trivial frekvensfl. $\square$

nya s.v.

Sats $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ s.v. Då är avbildningarna

$X+Y$, $X \cdot Y$, cX (där $c \in \mathbb{R}$ konstant)

$\max\{X, Y\}$, $\min\{X, Y\}$ s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$

Dessutom

$\frac{X}{Y}$ s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ om $P(\{\omega : Y(\omega) = 0\}) = 0$.

OBS punktvis definierade avbildn.

$(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$

$\max\{X(\omega), Y(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$ etc.

Bevis förbigås $\square$.

26.10

2.6. Oberoende stokastiska variabler

påminn kapitel 1.8 händelserna $A, B \in \mathcal{F}$ (σ-algebra) oberoende, bet. $A \perp\!\!\!\perp B$, om

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

För stokastiska variabler: finns motsvarande begrepp:

Anta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, X och Y s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$

Def X och Y är oberoende s.v., betecknas $X \perp\!\!\!\perp Y$, om

$$(*) \quad P(\{\omega : X(\omega) \le x\} \cap \{\omega : Y(\omega) \le y\}) = P(\{\omega : X(\omega) \le x\}) P(\{\omega : Y(\omega) \le y\})$$

(dvs. $\{X \le x\} \perp\!\!\!\perp \{Y \le y\}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$) för alla $x, y \in \mathbb{R}$

kan visa: $(*) \iff$

$$(**) \quad P(\{\omega : X(\omega) \in B_1\} \cap \{\omega : Y(\omega) \in B_2\}) = P(X \in B_1) P(Y \in B_2)$$

för alla Borel-mängder $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$

– Följd: om $X \perp\!\!\!\perp Y \overset{\text{kap}}{\underset{1.8}{\Rightarrow}} \underbrace{\{X \le x\}^c}_{=\{X > x\}} \perp\!\!\!\perp \underbrace{\{Y \le y\}^c}_{=\{Y > y\}}$ etc.

Exempel 2.22 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ konstant s.v., $X(\omega) \equiv c \Rightarrow$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \forall \text{ s.v. } Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

orsak:

$$P(\{\omega : X(\omega) \le x\}) = \begin{cases} 0, & \text{om } x < c \\ 1, & \text{om } x \ge c \end{cases}$$

dvs. $\{X \le x\} = \emptyset$ om $x < c$, $\{X \le x\} = \Omega$ om $x \ge c$

$\Rightarrow$ $\{\omega : X(\omega) \le x\} \perp\!\!\!\perp A$, $\forall$ händelser $A \in \mathcal{F}$ (Övn. 4)

(jfr HS och VS i villkoret $(*)$).

för diskreta s.v. erhålls följande test

Sats 2.23: Anta $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ diskreta s.v., med

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots\}.$$

Då gäller $X \perp\!\!\!\perp Y \iff$

$$(*) \quad P(\{X = x_k\} \cap \{Y = y_l\}) = P(X = x_k)\, P(Y = y_l) \quad \forall k, l$$

inte 2015

Bevis: $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} = \bigcup_{k;\, x_k \le x} \{\omega : X(\omega) = x_k\} \quad \text{disjunkt union}$$

$$\{\omega : Y(\omega) \le y\} = \bigcup_{l;\, y_l \le y} \{\omega : Y(\omega) = y_l\} \quad \text{—"—}$$

$$\Rightarrow \{\omega : X(\omega) \le x\} \cap \{\omega : Y(\omega) \le y\} \overset{\text{distributions-lag}}{=}$$

$$\bigcup_{\substack{k; \\ x_k \le x}} \bigcup_{\substack{l; \\ y_l \le y}} \Big[\underbrace{\{\omega : X(\omega) = x_k\} \cap \{\omega : Y(\omega) = y_l\}}_{\text{disjunkta för olika } k, l} \Big]$$

$$\Rightarrow P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) \underset{\text{för SL}}{\overset{\text{additivitsformel}}{=}} \sum_{\substack{k \\ x_k \le x}} \sum_{\substack{l \\ y_l \le y}} P(\{X = x_k\} \cap \{Y = y_l\})$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\substack{k \\ x_k \le x}} \sum_{\substack{l \\ y_l \le y}} P(X = x_k)\, P(Y = y_l) \underset{\text{disjunkta unioner}}{=} P(X \le x)\, P(Y \le y) \qquad \square.$$

för indikator funktioner

inte 2015

Exempel (2) $A, B \in \mathcal{F}$ händelser. Då är

$$1_A \perp\!\!\!\perp 1_B \iff A \perp\!\!\!\perp B.$$

Orsak $1_A, 1_B$ får värden 0 och 1.

paren $(0,0) \leftrightarrow (A^c, B^c)$, $(0,1) \leftrightarrow (A^c, B)$

$(1,0) \leftrightarrow (A, B^c)$, $(1,1) \leftrightarrow (A, B)$

Dessa par $\perp\!\!\!\perp \iff A \perp\!\!\!\perp B$ (kapitel 1.8). $\square$

(allmän egenskap

Sats 2.24 X, Y s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$. Då gäller

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$$

för alla kontinuerliga funktioner $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exempel: X^2 då $g(t) = t^2$, e^X då $g(t) = e^t$

Kom ihåg: $g(X)$ sammansatt fkt $g \circ X$ $\quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$g(X)(\omega) = g(X(\omega))$ $\quad$ kan visa: $g(X)$ s.v. (transformation av s.v.).

inte 2015 ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel fkt om

$\{x : g(x) \le a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel mängd $\forall a \in \mathbb{R}$.)

Beviset förbigås $\square$.

Exempel 2.25 Anta:

$$\left.\begin{array}{l} X, Y : \Omega \to \mathbb{R} \text{ s.v.} \\ X \perp\!\!\!\perp Y \\ X \sim \text{Poisson}(\lambda_1), \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

OBS gäller inte om $X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Bevis: kom ihåg $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $\lambda_1 > 0 \Rightarrow$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$p_k = P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$

först allmän observation: anta $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$

frekvensfkt $p_k = P(X = k)$, $q_l = P(Y = l)$, $k, l \in \mathbb{N}$

Då är

$$\{X + Y = k\} \overset{X \ge 0,\ Y \ge 0}{=} \bigcup_{j=0}^{k} \Big[\underbrace{\{X = j\} \cap \{Y = k - j\}}_{\text{disjunkta för olika } j}\Big]$$

$k = X(\omega) + Y(\omega) = j + (k - j)$

add. formel för sl $\Rightarrow$

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\{X = j\} \cap \{Y = k - j\})$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{P(X = j)}_{p_j} \underbrace{P(Y = k - j)}_{q_{k-j}} = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j}$$

Sats, s. 77 diskreta s.v.

$$\overset{X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)}{\underset{Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)}{=}} \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1)^j}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{(\lambda_2)^{k-j}}{(k-j)!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda_1)^j}{j!} \frac{(\lambda_2)^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} (\lambda_1)^j (\lambda_2)^{k-j}}_{= (\lambda_1 + \lambda_2)^k \ \leftarrow \text{binomialformeln!}} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$$

$= P(Z = k)$ där $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$. □

inte 2015

OBS i Exempel 3 (1. delen) härledde vi väsentligen följ. **konvolutions-formel** för frekvens fkt till summan

$$Z = X + Y \quad , \text{ där } X \perp\!\!\!\perp Y, \quad X, Y \text{ diskreta s.v. } \Omega \to \mathbb{R}$$

$$f_1(x) = P(X = x), \quad x \in X(\Omega)$$
$$f_2(y) = P(Y = y), \quad y \in Y(\Omega) \quad , \quad f(z) = P(Z = z), \quad z \in Z(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad P(Z = z) = \sum_x P(X = x)\, P(Y = z - x)$$

HS summa över x, med $x \in X(\Omega)$, $z - x \in Y(\Omega)$

dvs.
$$f(z) = \sum_x f_1(x) f_2(z - x)$$

inte 2015

andra exempel se sid 79A

Viktigt exempel för allmänna s.v.

Exempel 4 **Anta**: $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v.,

$$Y = \max\{X_1, X_2\}, \quad Z = \min\{X_1, X_2\}.$$

anta $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ **oberoende** s.v.

Problem finn fördelnings-fkt. F_Y och F_Z

Lösning $Y(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega)\} \Rightarrow$

$$Y(\omega) \le y \iff X_1(\omega) \le y \text{ och } X_2(\omega) \le y,$$

dvs.
$$\left.\begin{array}{c}\{\omega : Y(\omega) \le y\} = \{\omega : X_1(\omega) \le y\} \cap \{\omega : X_2(\omega) \le y\} \\ X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \text{ oberoende}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\{X_1 \le y\} \cap \{X_2 \le y\})$$
$$\overset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} P(X_1 \le y)\, P(X_2 \le y) \underset{\text{f.f.}}{=} F_1(y) F_2(y)$$

där bet. $F_1 = F_{X_1}$, $F_2 = F_{X_2}$.

Alltså $F_Y = F_1 \cdot F_2$

Praktiskt exempel med $\perp\!\!\!\perp$ s.v.

Exempel 2.26 De exponentfördelade s.v.

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right) \text{ och } Y \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right), \text{ där } X \perp\!\!\!\perp Y$$ oberoende av varandra

beskriver hållbarheten (= livslängden) (i timmar) av en förstärkare, respektive CD-spelare.

Beräkna sannolikheten av händelserna

A = både förstärkaren och CD-spelaren håller över 100 t

B = åtminstone en av apparaterna håller över 100 t.

Lösn. alltså X = hur länge förstärkaren håller $\sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$

Y = hur länge CD-spelaren håller $\sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$, och $X \perp\!\!\!\perp Y$ oberoende s.v.

Vi söker så

$$P(A) = P(\{X>100\} \cap \{Y>100\}) = P(\{X \le 100\}^c \cap \{Y \le 100\}^c)$$

$$\left(\text{påminn: kap. 1.8} \quad A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c \text{ för händelser, speciellt } \{X\le 100\}^c \perp\!\!\!\perp \{Y \le 100\}^c\right)$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(\{X\le 100\}^c)\,P(\{Y\le 100\}^c) = (1-P(X\le 100))(1-P(Y\le 100))$$

$$\overset{\text{fördeln.-fktn}}{=} \left(1-\left(1-e^{-\frac{1}{500}\cdot 100}\right)\right)\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{100}\cdot 100}\right)\right]$$

$F_X(x) = 1-e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$ para

$$= e^{-\frac{1}{5}}e^{-1} = e^{-\frac{6}{5}} \approx 0.301$$

Likaså:

$$P(B) = P(\{X>100\}\cup\{Y>100\}) \overset{\text{summen formel}}{=} P(X>100)+P(Y>100) - P(\{X>100\}\cap\{Y>100\})$$

$$\overset{\text{ovan}}{=} (1-P(X\le 100)) + (1-P(Y\le 100)) - e^{-\frac{6}{5}}$$

$$\overset{\text{ovan}}{=} e^{-\frac{1}{5}} + e^{-1} - e^{-\frac{6}{5}} = 0.885$$

D.

inte 2015

$$F_Z(z) = F_1(z) + F_2(z) - F_1(z)F_2(z) = (1-e^{-\lambda_1 z}) + (1-e^{-\lambda_2 z}) - (1-e^{-\lambda_1 z})(1-e^{-\lambda_2 z}) = \dots = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}$$

frekvensfkt

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} \Rightarrow Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1+\lambda_2)$$ exponent-fördelad, parameter $\lambda_1+\lambda_2$

Väntevärdet för livslängden av kopplingarna:

parallell: $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \{\lambda_1 y e^{-\lambda_1 y} + \lambda_2 y e^{-\lambda_2 y} - (\lambda_1+\lambda_2) y e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}\}\,dy$

$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$

tidigare $\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$ exp.-fördelad s.v.

serie: $E(Z) = \int_0^\infty z(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}\,dz = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$

OBS $E(Y) > E(Z)$ (som väntat). □

27.10

Begreppet oberoende behövs också för familjer av s.v. (centralt begrepp).

Anta: $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v.

Def: $\{X_1, \dots, X_n\}$ är oberoende s.v. om

$$(*) \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \le a_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \le a_i)$$ för varje $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$\overset{\text{kan}}{\underset{\text{visa}}{\Longleftrightarrow}}$

$$(**) \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i)$$ $\forall$ Borel-mängder $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}$

Beteckna $\{X_1, \dots, X_n\}$ ⫫, eller $X_1, \dots, X_n$ oberoende

Fallet $n = 2$ som tidigare

allmän egenskap

Sats 2.27 $\{X_1, \dots, X_n\}$ ⫫ oberoende s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$g(X_1, \dots, X_k) \perp\!\!\!\perp h(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

för alla ~~Borel~~ kontinuerliga funktioner $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n-1$

Exempel $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ⫫, $g(x,y) = x+y$, $h(x,y) = x \cdot y$ $\Rightarrow$ $X_1 + X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \cdot X_4$

där $\Omega \xrightarrow{(X_1,\dots,X_k)} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sammansatt fkt.

$g(X_1, \dots, X_k)(\omega) = g(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega))$, $\omega \in \Omega$

Beviset förbigås ☒

specialfall (exempelvis)

$$\left.\begin{array}{l}\{X_1,\dots,X_4\} \text{ oberoende s.v.} \\ g(x,y) = x+y \\ h(x,y) = x\cdot y \qquad g, h \text{ kontinuerliga } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \cdot X_4$$

etc.

Exempel 2.28 Anta att ett utrymme har 5 lampor och att lamporna fungerar oberoende av varandra. Hållbarheten (Livslängden) av varje lampa är en s.v. $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{150}\right)$ $(i=1,\dots,5)$ (tidsenhet timmar) som är exponentfördelade. Beräkna sl att ingen lampa fungerar efter 100 t.

Lösn antagandet $\{X_1,\dots,X_5\}$ oberoende $\Rightarrow$ sannolikheten

$$P(\text{ingen lampa fungerar efter } 100\,t) = P\left(\{\omega : \max\{X_1(\omega),\dots,X_5(\omega)\} \le 100\}\right)$$

observera $\{\max\{X_1(\omega),\dots,X_5(\omega)\} \le 100\} = \bigcap_{i=1}^{5} \{X_i \le 100\}$ snittmängd

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{5}\{X_i \le 100\}\right) \overset{\{X_1,\dots,X_5\}\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{5} P(X_i \le 100)$$

$$\overset{\text{alla } X_i \sim Exp\left(\frac{1}{150}\right)}{=} \prod_{i=1}^{5} F_{X_i}(100) \underset{\text{Exp 2.4}}{=} \left(1 - e^{-2/3}\right)^5 \approx 0.027$$

påminn: $F_{X_i}(100) = 1 - e^{-\frac{1}{150}\cdot 100} = 1 - e^{-2/3} \quad \forall i$

$$\left(\text{om } X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow F_X(100) = \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda\cdot 100}\right)$$

D.

inte 2015

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n + b \sim N(\mu, \sigma^2),$$

där $\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j\mu_j + b$, $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} c_j^2\sigma_j^2$

för varje $c_1, \dots, c_n, b \in \mathbb{R}$.

Beviset förbigås $\square$ (se [T], s. 73, fallet $n=2$).

2.7. Transformationer av stokastiska variabler (främst exempel)

$\approx$ nya s.v. från givna s.v.

tidigare: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v., $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (~~Borel funktion~~) (kontinuerlig fkt.) $\Big\} \Rightarrow$ (kan visa) $g(X) = g \circ X$ s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow[\text{kontinuerlig etc.}]{g} \mathbb{R}$$

$g(X)(\omega) = g(X(\omega)), \ \omega \in \Omega$

exempelvis: X^2, $|X|$, $|X|^p$, $0 < p < \infty$, e^X är s.v.

då $g(t) = t^2$, $g(t) = |t|$,

Problem: fördelningsfkt (eller frekvensfkt) till $Y = g(X)$?

enklaste fallet

(A.) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuerlig, strängt växande bijektion

$\Rightarrow \exists$ invers funktion $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(\{\omega : X(\omega) \le g^{-1}(t)\}) = F_X(g^{-1}(t))$$

$Y(\omega) \le t \overset{g \text{ växande}}{\Longleftrightarrow} g(X(\omega)) \le t$

$\Longleftrightarrow X(\omega) \le g^{-1}(t)$

kom ihåg: $g^{-1}(g(t)) = t \ \forall t$

altså: g strängt växande $\Rightarrow F_{gX}(t) = F_X(g^{-1}(t))$

om däremot
g strängt avtagande bijektion: $g(X(\omega)) \le t \underset{g^{-1} \text{ avtag.}}{\Longleftrightarrow} X(\omega) \ge g^{-1}(t)$, dvs.

$$F_{gX}(t) = P(\underbrace{\{\omega : X(\omega) \ge g^{-1}(t)\}}_{\{\omega : X(\omega) < g^{-1}(t)\}^c}) = 1 - P(X < g^{-1}(t)).$$

Exempel (1) $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$\Rightarrow Y = g(X)$, $g(t) = at + b \Rightarrow g^{-1}(s) = \frac{s-b}{a}$

$\left(at + b = s \Longleftrightarrow s = \frac{t-b}{a} \right)$

alltså: $F_Y(t) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad t \in \mathbb{R}$

jämför $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Leftrightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

inte på förelä.

Exempel (2) (mellanförhör '84)

Ex (2) inte på föreläsningen

Anta: X s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$, $X \sim \text{Tas}(0,1)$

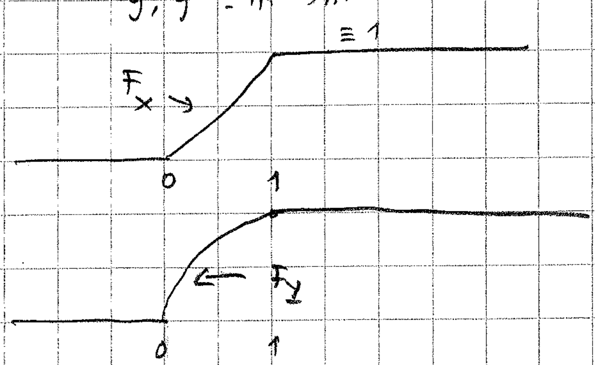
$Y = X^3$

Sök fördelnings-fkt och frekvens-fkt. till Y

Lösn.

$g(x) = x^3$, $g^{-1}(y) = y^{1/3}$ $\quad g, g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f.-f. $F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$



$F_Y(t) = F_X(t^{1/3}) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t^{1/3}, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

frekvens funktion

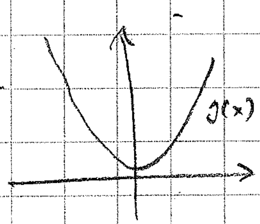
$\boxed{\text{kom ihåg} \quad f_Y(t) = F_Y'(t)}$

$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{d}{dt}\left(F_X(t^{1/3})\right) = \underbrace{F_X'(t^{1/3})}_{} \cdot \frac{1}{3} t^{-2/3} = \begin{cases} \frac{1}{3} t^{-2/3}, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

sammansatt fktn $t \mapsto t^{1/3} \xrightarrow{F_X} F_X(t^{1/3})$ $\quad \equiv 1$, $0 < t < 1$, annars $\equiv 0$

lite svårare (utanför fall A)

Exempel 2.29 anta $X \sim \text{Tas}(0,1)$, $Y = X^2$ $\quad g(x) = x^2$



Bestäm f.-f. och frekvensfunktion av Y.

Lösn

$P(\{\omega : 0 < X(\omega) < 1\}) = 1 \overset{Y(\omega) = X(\omega)^2}{\Longrightarrow} P(\{\omega : 0 < Y(\omega) < 1\})$.

anta $0 < y < 1$

$F_Y(y) = P(\{\omega : X(\omega)^2 \le y\}) = P(\{\omega : -\sqrt{y} \le X(\omega) \le \sqrt{y}\})$

$\underset{X(\omega) \ge 0}{=} P(\{\omega : 0 \le X(\omega) \le \sqrt{y}\}) = F_X(\sqrt{y}) \underset{X \sim \text{Tas}(0,1)}{=} \sqrt{y}$

frekvensfkt. $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$, $\quad 0 < y < 1$

$f_Y(y) = 0$ annars.

12/2/2015

Exempel (4) $\quad X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$

f.-f. och frekvensfkt?

om $y > 0 \Rightarrow$

f.-f. $F_Y(y) = P(\{\omega : X(\omega)^2 \le y\}) = P(\{\omega : -\sqrt{y} \le X(\omega) \le \sqrt{y}\}) =$