inte 2015 se sid 34A

Exempel 2 Statistisk kvalitetskontroll

varupartier med 20 enheter, kontrolleras på måfå 6 st enheter utan återläggning

Anta ett givet parti innehåller 8 defekta enheter (av 20).
Vilken är sl att man vid kontrollen erhåller

(i) endast korrekta enheter
(ii) exakt 3 defekta enheter
(iii) åtminstone 1 defekt enhet.

Lösn. vit = defekt, svart = korrekt

A_k = exakt k st vita (= defekta) bland utdragning av 6 st utan återläggning

$N=20,\ K=8,\ N-K=12$

(i) $$P(A_0) = P(\text{endast korrekta}) \underset{k=0}{\overset{A}{=}} \frac{\underbrace{\binom{8}{0}}_{=1}\binom{12}{6}}{\binom{20}{6}} = \frac{\frac{12\cdot 11\cdots 7}{6!}}{\frac{20\cdot 19\cdots 15}{6!}} = \frac{77}{3230} \simeq 0.024$$

(ii) $$P(\text{exakt 3 defekta}) = P(A_3) \underset{k=3}{=} \frac{\binom{8}{3}\binom{12}{6-3}}{\binom{20}{6}} = \ldots = \frac{308}{969} \simeq 0.32$$

(iii) $$P(\text{åtminstone 1 defekt}) = 1 - P(\text{alla korrekt}) \overset{(i)}{=} 1 - \frac{77}{3230} \approx 0.976\ldots$$

extra (iv) sl för högst 3 defekta enheter i kontrollen?

$$P(\text{högst 3 defekta}) = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) \underset{\text{disjunkta!}}{=}$$

ingen defekt   1 defekt   ...

$$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \ldots$$

28.9.

C. Multinomialkoefficienter (generalisering av binomialkoefficienterna)

binomialkoefficienter $\binom{n}{k}$ = antalet möjligheter fördela n st element i 2 delar (= fack), så att första delen har k st element ($\Rightarrow$ 2. delen har n−k st. element).

generalisering: givet k st fack ($k=2,3,4,\ldots$), antal $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ så att $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ (n givet tal)

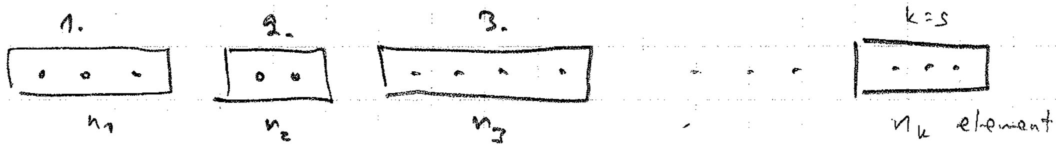
Låt E: basmängd, $\#(E) = n$.

Problem på hur många sätt kan man fördela n st element så att

$$E = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \quad \text{där} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j$$ parvist disjunkta

och antalet element $\#(A_j) = n_j$, $j = 1, \dots, k$. ?

tolkning: söker antalet möjligheter fördela n element i k fack så att j:s fack innehåller (exakt) n_j element, $j = 1, \dots, k$



Påstående: antalet möjligheter ovan är

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

(multinomialkoefficienterna)

Betecknas ofta $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$

Orsak

1. facket $\binom{n}{n_1}$ möjligheter

2. facket $\binom{n-n_1}{n_2}$ möjligheter

$\vdots$

k:s fack $\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$ möjligheter

multiplik. $\Longrightarrow$ principen (oberoende av varandra) sammanlagt

förenkla!

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1 \cdots - n_{k-1}}{n_k} = \cdots = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} \quad \text{möjligheter}$$

exempelvis $(k=2,\; n_1+n_2=n) \Rightarrow \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!\underbrace{(n-n_1-n_2)!}_{=0!=1}} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}$

alternativ förklaring:

varje permutation av E ($n!$ st) bestämmer en fördelning av n st element i k st fack

Samma fördelning ((= samma element i givna fack) ger

$$n_1!\; n_2! \cdots n_k! \quad \text{olika sätt}$$

($n_1!$: permut. i fack 1, $n_2!$: permut. i fack 2)

$\Rightarrow$ antalet möjligheter är $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{n=2}: \quad n = n_1 + n_2 \\ \dfrac{n!}{n_1!\, n_2!} = \dfrac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \\ = \binom{n}{n_1} \text{ binom.} \end{array}}$

OBS multinomial kommer av

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \\ n = n_1+n_2+\dots+n_r}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} (a_1)^{n_1} (a_2)^{n_2} \cdots (a_r)^{n_r}$$

Exempel 1.22 Bokstäverna i ordet

M I S S I S S I P P I

permuteras godtyckligt. Bestäm sl

$$P(\text{ordet detsamma efter permutering})$$

Lösn 1. sättet (multinomiala koeff.)

M	I	S	P
1 st	4 st	4 st	2 st

11 bokstäver

antalet olika ord (grupperat fackvis)
$$S = \frac{(11)!}{1!\,4!\,4!\,2!} = \frac{(11)!}{2\cdot(4!)^2}$$

alla ord lika sl (symm.) $\Rightarrow$ (MISSISSIPPI exakt en möjlighet)
$$P(\text{samma ord}) = \frac{1}{S} = \frac{2\,(4!)^2}{(11)!}$$

2. sättet totala antalet permutationer av 11 bokstäver $= (11)!$

samma ord?

permutationer $M \to M$ $1!$

— " — $I \to I$ $4!$

— " — $S \to S$ $4!$

— " — $P \to P$ $2!$

"oberoende" $\Rightarrow$ MP

$2\,(4!)^2$ möjligheter

$$\Rightarrow P(\text{samma ord}) = \frac{2\,(4!)^2}{(11)!}$$

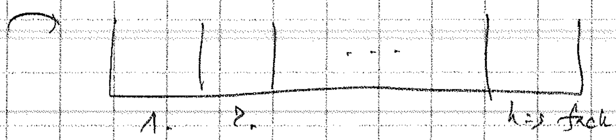
$\Omega = \{\text{alla perm. på 11 bokstäver}\}$, $\#(\Omega) = (11)!$

D.

Varning: olika slumrum i sätt 1 och sätt 2 !

Exempel 1.23 n st kulor fördelas slumpmässigt i k st fack

① ② ... ⓝ



dvs facken väljs på måfå för varje kula.

Problem bestäm sl för händelserna

$$A(n_1, \dots, n_k) = \text{j:s fack har } n_j \text{ st kulor}, \quad j = 1, \dots, k$$

(då är $n = n_1 + \dots + n_k$ totala antalet kulor).

Lösn facken väljs slumpmässigt $\Longrightarrow$ placeringen av n kulor beskrivs av

n-följden $(r_1, \dots, r_n)$ där

r_j = j:s kula finns i fack nr $r_j \in \{1, \dots, k\}$, $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ utfallsrum $\Omega = \{1, \dots, k\}^n \Rightarrow \#(\Omega) = k^n$

multinomialkoeff. $\Rightarrow$ antalet möjligheter
$$\#(A(n_1, \dots, n_k)) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \Rightarrow$$

(symmetrisk) sl $\quad P(A(n_1, \dots, n_k)) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \cdot \frac{1}{k^n}$ $\quad \#(\Omega)$

(där $n = n_1 + \dots + n_k$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$).

Specialfall $\quad n$ tärningskast

poängtal $1, \dots, 6 = 6$ fack $\quad (k = 6)$

$n = n_1 + \dots + n_6$ $\quad$ (där n_i = antalet tärningar med poängtalet i)

$$\Rightarrow P(\text{poängtalet } i \text{ fås } n_i \text{ ggr}, i = 1, \dots, 6) = \frac{1}{6^n} \cdot \frac{n!}{n_1! \dots n_6!}$$

1.4.

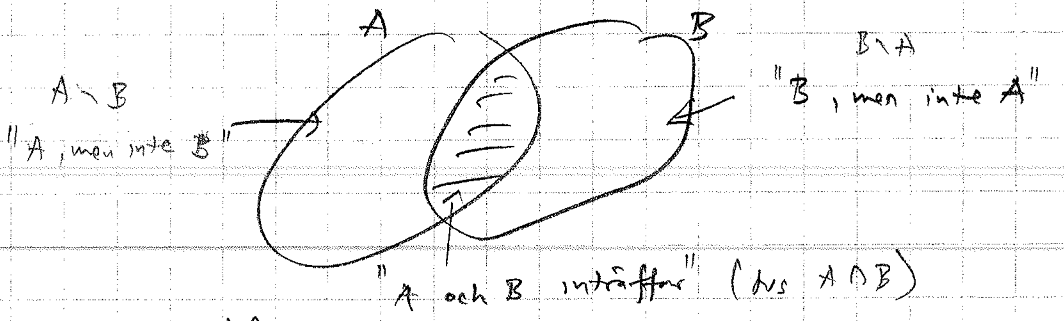
\+ 1.7. Betingad sannolikhet

Anta allmänt: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sannolikhetsrum:

$\mathcal{F}$ σ-algebra på Ω, $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ sannolikhet

Låt $A, B \in \mathcal{F}$ händelser, $P(B) > 0$.

Problem: sannolikheten för A, om händelsen B inträffat?



Definition vi definierar
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathcal{F},$$
sannolikheten för A med betingelsen (= villkoret) B.
(sannolikheten för A givet B).

Motivation klassisk symmetrisk sl:

basmängd E, antal $\#(E) = n < \infty$ $\qquad P(A) = \frac{\#(A)}{n}$

Låt $A, B \subset E$ delmängder $\qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$ = potensmängden till E

Anta B inträffar

A inträffar $\Leftrightarrow$ $A \cap B$ inträffar betrakta B som basmängd $\Rightarrow$

symm SR ; P(E)

$$P(A \text{ med villkort } B) = \frac{\#(A\cap B)}{\#(B)} = \frac{\frac{\#(A\cap B)}{n}}{\frac{\#(B)}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$, som ovan!

+ Exempel 1.24 (1) En familj har 2 barn. Vilken är sannolikheten att båda barnen är flickor, givet att åtminstone ett barn är en flicka?
(anta: flickor och pojkar lika sannolika).

Lösn: utfallsrum

Ω: FF, FP, PF, PP ; A = {FF}, B = {FF, FP, PF}

B = åtminstone 1 flicka
A = båda flickor

$$\Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

OBS: $\neq \frac{1}{2}$!
olika intuitionen!

(2) En familj har 2 barn. Vilken är SR att båda barnen är flickor, om det äldre barnet är en flicka?

Lösn utfallsrum

Ω: FF, FP, PF, PP ; A = {FF}, B = {FF, FP}

A = båda flickor
B = äldre barnet en flicka

$$\Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

exempel, s. $38\frac{1}{2}$

29.1.

allm. egenskaper av betingade sannolikheter

Sats 1.26 Anta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sannolikhetsrum, $B\in\mathcal{F}$ givet med $P(B)>0$.
Då är avbildningen
$$A \mapsto P(A|B), \quad \mathcal{F} \to [0,1]$$
en sannolikhet, dvs.

(i) $P(A|B) \geq 0 \quad \forall A\in\mathcal{F}$

(ii) $P(\Omega|B) = 1$

(iii) om $\left.\begin{array}{l} A_j \in \mathcal{F},\ j=1,2\ldots \\ A_i\cap A_j = \emptyset \quad \forall i\neq j \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \,\Big|\, B\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|B)$

Bevis (övning 6:3) $\square$.

Obs specialfall: $\left.\begin{array}{l} A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{F}, \\ A_i\cap A_j = \emptyset \text{ då } i\neq j \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$P(A_1\cup\ldots\cup A_n | B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j|B)$$

Exempel 1.25 En box innehåller 4 vita och 6 svarta kulor.
Vi drar på måfå utan återläggning 2 kulor.
Vilken är den betingade sl att den 2. kulan är vit om den 1. kulan är svart?

Lösn

utfallsrum: ordnade par (n_1, n_2) , $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, 10\}$ (utan återläggning!)

1. kulan

Ω = 2-variationer av 10 $\stackrel{1.5\text{-D}}{\Rightarrow}$ $\#(\Omega) = 10\cdot 9 = 90 = \binom{10}{2}$

(OBS: ordningen av betydelse).

A = 1. kulan svart, B = 2. kulan vit

$\Rightarrow \#(A) = 6\cdot 9 = 54$, $\#(A\cap B) = 6\cdot 4 = 24$

6 svarta, alla möjligheter (kvar 9 st) ; 1. svart, 2 vit (kvar 4 vita)

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{6\cdot 9}{9\cdot 10} = \frac{3}{5}, \quad P(A\cap B) = \frac{6\cdot 4}{10\cdot 9} = \frac{12}{45}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \quad P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{45}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{9} \qquad \left(= \frac{5\cdot 12}{3\cdot 45} \right)$$

intuitionen OK: 1. kulan svart $\Rightarrow$ 4 vita möjligheter av 9 för 2. kulan

29.9

OBS Satsen $\overset{\text{Sats 1.7}}{\Longrightarrow}$ $A \mapsto P(A|B)$ satisfierar också exempelvis

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B) \quad , \quad A \in \mathcal{F}$$

Summaformel för sl

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2 | B), \quad A_1, A_2 \in \mathcal{F}$$

(se kapitel 1.3 ; gäller för alla sannolikheter !).

Multiplikationsformeln om $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ $\Longrightarrow$

$$(*) \qquad P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) \underset{\uparrow \text{symmetri}}{=} P(B)\, P(A|B)$$

Orsak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{etc.}$$

Lös:

$$\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \end{cases}$$

generalisering: om $A, B, C \in \mathcal{F}$, $P(A \cap B) > 0$ $\Longrightarrow$ (exempelvis) erhåller att

$$P(\underbrace{A \cap B}\cap C) \overset{(*)}{=} P(A \cap B)\, P(C|A \cap B) \overset{(*)}{=} P(A)\, P(B|A)\, P(C|A \cap B)$$

2015: endast fallet $n = 3$

allmän formel : (induktion på n)

$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$ $\Longrightarrow$

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

~~Exempel (3). En person har 8 identiska nycklar, varav endast en nyckel öppnar låset. Personen försöker nycklarna i tur och ordning. Vilken är sl att låset öppnas (exakt) på 5 försöket ?~~

~~Lösn. A_j = j:s nyckel öppnar $\Longrightarrow$~~

$$\cancel{P(\text{öppnas på 5. försöket}) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)}$$

$$\cancel{= P(A_1^c)\, P(A_2^c|A_1^c)\, P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c)\, P(A_4^c|A_1^c \cap \ldots \cap A_3^c)\, P(A_5|A_1^c \cap \ldots \cap A_4^c)}$$

$$\cancel{= \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}}$$

~~7 kvar, 6 fel~~

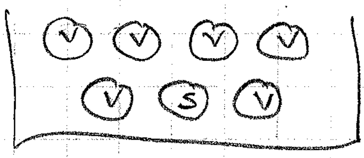
~~[OBS: direkt 1 korrekt möjlighet av 8 $\Rightarrow$ sl $= \frac{1}{8}$]~~

multiplikationsformeln kan användas till att beräkna vanliga sl:r

Exempel 1.27 En box innehåller 6 vita kulor och 1 svart kula. 5 kulor dras på måfå utan återläggning. Bestäm sl att den svarta kulan blir kvar i boxen.

Föreläsningen 2015: 3 kulor dras $\Rightarrow$ sl

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{7}$$



Lösn

1. sättet (betingad sl)

A_j = den svarta kulan erhålls inte vid j:s dragning. $j = 1, 2, \dots, 5$.

Vi söker

$$\underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5)}_{\text{svarta kulan inte i 5 dragningar}} = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\,P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)\,P(A_5|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$

$$= \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{7}$$

eftersom $P(A_1) = \frac{6}{7}$ (6 vita av 7), $P(A_2|A_1) = \frac{5}{6}$ (1. vita $\Rightarrow$ 5 vita kvar bland 6 kulor)

$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{5}$ (4 vita kulor kvar bland 5), etc.

2-sättet (dragning utan återläggning)

1.6.A $\Rightarrow$

$N=7$, $K=6$, $n=k=5$

5-kombinationer

$$P(\text{svarta kulan kvar}) = P(\text{5 vita kulor}) = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{1}{0}}{\binom{7}{5}}$$

$$= \frac{\frac{6!}{5!}}{\frac{7!}{2!\,5!}} = \frac{2\cdot 6}{6\cdot 7} = \frac{2}{7}.$$

$\square$

Betingade sannolikheter: mera senare!

28/11/2015

++ 1.8. **Oberoende händelser**

Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sannolikhetsrum

σ-alg. sl-funktion

Obs allmänna sl-rum

$A, B \in \mathcal{F}$ händelser

Def: Händelserna A och B är oberoende, om

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B),$$

betecknas $A \perp\!\!\!\perp B$

Oberoende händelser är ett centralt begrepp i sl (skiljer från "mått och integral").

Intuition: A är oberoende av B, om sl $p(A)$ är oberoende av ifall händelsen B inträffat eller inte:

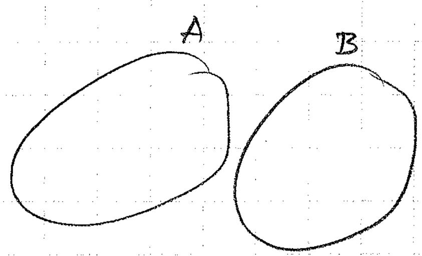
om $P(B)>0$, så är $A \perp\!\!\!\perp B \iff$ betingad sl
$$P(A|B) = p(A)$$

Orsak: $P(A|B) \overset{def.}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$

Varning: oberoende händelser $A \perp\!\!\!\perp B$ har (nästan) ingenting att göra med disjunkta händelser $A\cap B = \emptyset$:

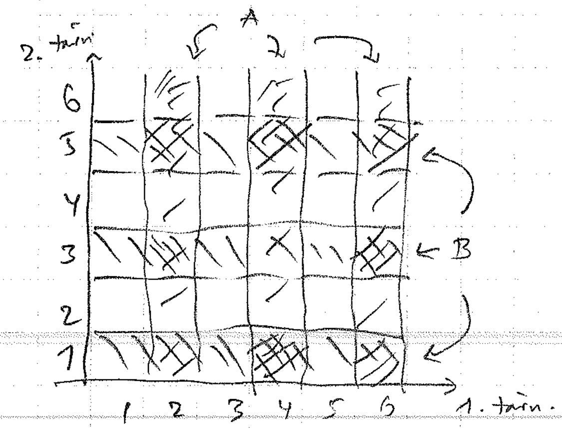
om $\left.\begin{array}{l} A, B \in \mathcal{F},\ A\cap B = \emptyset \\ P(A)>0,\ P(B)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow A \not\perp\!\!\!\perp B$ $\quad A, B$ inte oberoende

Orsak: $P(A\cap B) = P(\emptyset) = 0$
$P(A)P(B) > 0$



Exempel (1) 2 tärningar kastas. Låt
A = 1. tärningens poängtal jämnt
B = 2. tärningens poängtal udda.

utfallsrum $\Omega = \{1, 2, \ldots 6\}^2$, $\#(\Omega) = 36$
par (n_1, n_2) symm. sl
1. poängtal, 2. poängtal



$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{3\cdot 6}{36} = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{3\cdot 6}{36} = \frac{1}{2} \\ P(A\cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A \perp\!\!\!\perp B$.

egenskaper

Sats. Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, $A, B \in \mathcal{F}$ händelser. Då

(i) $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow B \perp\!\!\!\perp A$ ("symmetriskt")

(ii) om $A \perp\!\!\!\perp B$ oberoende händelser $\Rightarrow$ även

$A^c \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp B^c$ och $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$ oberoende händelser

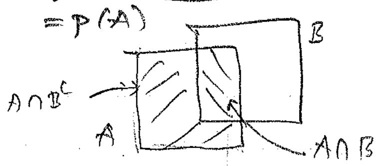
Bevis (i) uppenbart: $A\cap B = B\cap A, \ldots$

(ii) $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$,

$$P(A)\underbrace{P(B^c)}_{1-P(B)} = P(A) - \underbrace{P(A)P(B)}_{P(A\cap B)} = P(A) - P(A\cap B)$$

$$= \underbrace{P(A\cap B) + P(A\cap B^c)}_{=P(A)} - P(A\cap B) = P(A\cap B^c)$$

$A = (A\cap B) \cup (A \cap B^c)$ disjunkta



$\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c$

symmetri ger: $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow B \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow B \perp\!\!\!\perp A^c \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B$

kombinera: $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

$\square$

Oberoende definieras också för flera än 2 händelser. Det finns två möjligheter:

Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-mm, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ givna händelser.

Def ① händelserna $\{A_1, \dots, A_n\}$ är (fullständigt) oberoende om

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

för alla kombinationer av index $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$, och $2 \le k \le n$.

Obs $n=3$ $\{A, B, C\}$ oberoende betyder:
$P(A\cap B) = P(A)P(B)$
$P(A\cap C) = P(A)P(C)$
$P(B\cap C) = P(B)P(C)$
$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$

② Händelserna $\{A_1, \dots, A_n\}$ är parvis oberoende om

$A_i \perp\!\!\!\perp A_j$ alltid då $i \neq j$.
(dvs. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i \neq j$)

Obs
Dessa är olika begrepp:

$\{A_1, \dots, A_n\}$ oberoende $\Rightarrow$ $\{A_1, \dots, A_n\}$ parvist oberoende, men

$\{A_1, \dots, A_n\}$ parvis oberoende $\not\Rightarrow$ $\{A_1, \dots, A_n\}$ oberoende
(inte alltid) (men $n=2$: samma begrepp)

enligt följande

Övn 2015
↳ Exempel 1.30 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ symmetriskt sl $P(\{k\}) = \frac{1}{4}$, $k = 1, \dots, 4$.

låt

$A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 4\}$.

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ A\cap B = A\cap C = B \cap C = \{4\} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $P(A\cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$
på samma sätt $A \perp\!\!\!\perp C$, $B \perp\!\!\!\perp C$.

$A\cap B\cap C = \{4\} \Rightarrow P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Alltså: $\{A, B, C\}$ parvis oberoende
$\{A, B, C\}$ inte oberoende $\square$

Sats 1.31 Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sannolikhetsrum, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ givna händelser.

Då gäller:
om $\{A_1, \ldots, A_n\}$ oberoende $\Rightarrow$ händelserna $\{B_1, \ldots, B_n\}$ oberoende där

$B_j = A_j$ eller $B_j = A_j^c$ $(j = 1, \ldots, n)$ (vilken som helst kombination)

Dessutom:

$$(*) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c) P(A_2^c) \ldots P(A_n^c)$$

Bevis 1. delen som fallet $n = 2$ (Sats 1.29)

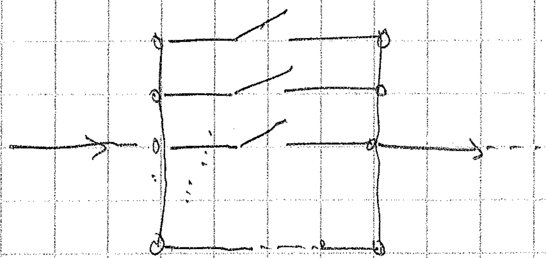
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \overset{\text{komplement}}{=} 1 - P((A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c) \underset{\text{Morgan}}{\overset{\text{de}}{=}} 1 - P(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c)$$

$$\underset{i = j \ \forall j}{\overset{\text{oberoende}}{=}} 1 - P(A_1^c) \ldots P(A_n^c) \quad \square.$$

obs: även
$P(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}) = 1 - P(A_{i_1}^c) \ldots P(A_{i_k}^c)$
för alla $i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$

Formel $(*)$ kan användas till att beräkna sl:r

Exempel 1.32 Ett system med n komponenter är ett parallellsystem om systemet fungerar då åtminstone en komponent fungerar.



Anta: $(*)$ varje komponent i är oberoende av alla andra komponenter $j \in \{1, \ldots, n\}$ och komponenten i fungerar med sl $p_i \in (0,1)$, $i = 1, \ldots, n$.

Vilken är sl att systemet fungerar?

Lösn Låt A_i = komponent i fungerar, $i = 1, \ldots, n$. Enligt $(*)$ gäller

$$P(\underbrace{\text{systemet fungerar}}_{= A_1 \cup \ldots \cup A_n}) = 1 - P(\text{systemet fungerar inte})$$

$$= 1 - P((A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c) \underset{\text{Morgan}}{\overset{\text{de}}{=}} 1 - P(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c)$$

$$\underset{(*)}{\overset{\perp\!\!\!\perp}{=}} 1 - \underbrace{P(A_1^c)}_{1 - p_1 \text{ etc}} \cdot P(A_2^c) \ldots P(A_n^c) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)$$

Obs $(*)$ ekvivalent antagandet som $\{A_1, \ldots, A_n\}$ fullständigt oberoende. $\square$.

inte 2015

$$\Rightarrow P(\text{exakt en av } A_1, A_2, A_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additions-} \\ \text{formel}}}{\overset{\text{disjunkt union}}{=}} P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ oberoende $\Rightarrow$ $\{A_1, A_2, A_3\}$ oberoende $\overset{\text{sats}}{\Rightarrow}$ även $\{A_1, A_2^c, A_3^c\}$ oberoende etc.

$$= \underbrace{P(A_1)}_{=p} \underbrace{P(A_2^c)}_{1-p} \underbrace{P(A_3^c)}_{1-p} + \underbrace{P(A_1^c)}_{1-p} \underbrace{P(A_2)}_{p} \underbrace{P(A_3^c)}_{1-p} + \underbrace{P(A_1^c)}_{1-p} \underbrace{P(A_2^c)}_{1-p} \underbrace{P(A_3)}_{p} = 3p(1-p)^2$$

D. 4.10

1.9. Försök med oberoende upprepningar ("toistokoeet")

tillämpning av obero. händelser

Ett försök med oberoende upprepningar avser ett försök som upprepas (under identiska förhållanden). Vi studerar om en händelse A inträffar eller inte.

Låt $P(A) = p$, $P(A^c) = 1 - p = q$ $\quad$ $(0 \le p \le 1$ givet$)$

Ett försök som upprepas n gånger beskrivs av ordnade n-följder

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \text{ där}$$

$$x_j = \begin{cases} A, & \text{om } A \text{ inträffar i } j\text{:s försök} \\ A^c, & \text{om } A \text{ inte inträffar i } j\text{:s försök} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n$$

Oberoende upprepningar $\Rightarrow$ enligt def

$$P((x_1, x_2, \dots, x_n)) = p^k q^{n-k}$$

om k st A i $(x_1, \dots, x_n)$ $(\Leftrightarrow$ $n-k$ st A^c i $(x_1, \dots, x_n))$.

Antalet följder är

$$\binom{n}{k}, \qquad (k \text{ st platser } A \text{ från } n \text{ st})$$

Vi har:

Sats 1.33 Låt $P(A) = p$. I försök med n oberoende upprepningar har händelsen B_k = A förekommer exakt k gånger (vid n oberoende upprepn.) sannolikheten

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , \quad k = 0, \dots, n \quad , \text{ där } q = 1 - p.$$

(obs. binomialkoeff $\Rightarrow$ $0 \le \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \le 1$)

Orsak: olika platser av A $\leftrightarrow$ disjunkta "möjligheter".

D.

OBS: utfallsrummet Ω har inte specificerats närmare för upprepningarna.

(om väljer $\Omega = \{A, A^c\}^n$ med $\#(\Omega) = 2^n$ erhålls inte ett symmetriskt Sl-rum !!)

Exempel 1.34 (1) En tärning kastas 10 gånger. Låt

$B_k =$ exakt k gånger poängtalet 3 $\quad (k = 0, \dots, 10)$.

$P(B_k) = ?$

Lösn. Försök med 10 oberoende upprepningar $\Rightarrow$ med $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$:

$$P(B_k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}, \quad k = 0, \dots, 10$$

k av 10 platser

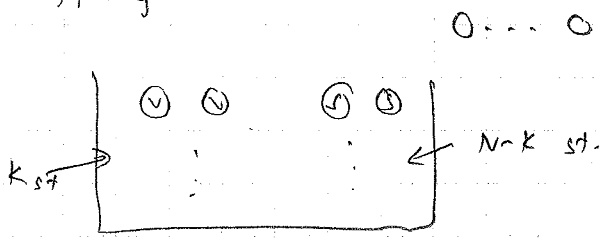
sl för 3:a k ggr

sl för ögontalen $\{1,2,4,5,6\}$ $n-k$ ggr.

Exempel (2). Specialfall: dragning med återläggning (alternativt sätt)

K vita kulor, $N-K$ svarta kulor

drag n st kulor med återläggning



$$P(\text{exakt } k \text{ vita kulor}) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} \left[\frac{K}{N}\right]^k \left[1 - \frac{K}{N}\right]^{n-k}$$

n oberoende upprepning av

$A =$ vit kula vid dragning

$\Rightarrow P(A) = p = \frac{K}{N}$

$$= \binom{n}{k} \cdot \frac{K^k (N-K)^{n-k}}{\underbrace{N^k N^{n-k}}_{N^n}}$$

jämför 1.6.B.

Exempel 1.35 Låt $P(A) = p$, och

$C_k =$ händelsen A ~~uppträder~~ (= inträffar) k:te gången vid n:te (oberoende) upprepningen.

$P(C_k) = ?$

Lösn. elementära utfall i C_k har formen

$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, A)$ med $k-1$ st A bland $x_1, \dots, x_{n-1}$

(A på n:te plats)

Motsvarande sl är $p^k q^{n-k}$ (där $q = 1-p$) (Obs räkna med sl för sista A).

Antal möjliga n-följder av denna typ är

$\binom{n-1}{k-1}$. ($k-1$ st A bland $x_1, \dots, x_{n-1}$)

$$\Rightarrow P(C_k) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n$$

Specialfall: $A =$ poängtalet 6 vid tärningskast, $P(A) = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow P(k\text{:s sexa vid tionde kastet}) \overset{n=10}{=} \binom{9}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}, \quad k = 1, \dots, n$$

1.10. Totala sannolikhetslagen och Bayes formel

("kokonaistodennäköisyyden kaava")

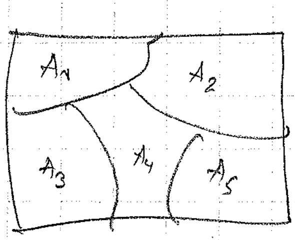
$\boxed{\text{allmän situation}}$

Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sl-rum.

Def: Familjen $\{A_1, \dots, A_n\}$ är en partition av Ω i händelser om

- $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ händelser
- $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ då $i \neq j$

(dvs. varje $x \in \Omega$ tillhör exakt en mängd A_j).



Totala sannolikhetslagen: Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum och $B \in \mathcal{F}$ en given händelse.

(i) anta att $A \in \mathcal{F}$ satisfierar $P(A) > 0$ och $P(A^c) > 1$. Då gäller

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c)$$

(ii) anta: familjen $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{F}$ är en partition av Ω, så att $P(A_j) > 0$ då $j = 1, \dots, n$. Då gäller

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)$$

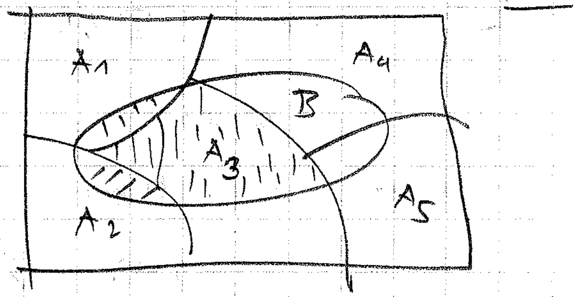
$P(B|A_j) =$ betingad sl för A med villkor B_j, se. 1.7.

5.10.

Bevis (i) specialfallet $\{A, A^c\}$ av (ii)

(ii) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \Rightarrow$ (partition)

$$B = B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \overset{\text{distrib. lag}}{=} \bigcup_{j=1}^{n} (B \cap A_j)$$



$A_i \cap A_j = \emptyset$ då $i \neq j \Rightarrow (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$ då $i \neq j$

(eller $B \cap A_i \subset A_i$, $B \cap A_j \subset A_j$ och $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$)

additionsformel för sl-funktion $P \Rightarrow$

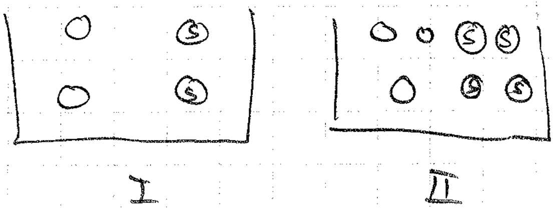
$$P(B) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} (B \cap A_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{P(B \cap A_j)}_{\overset{(1.7)}{=} P(B|A_j)P(A_j)} = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j) \qquad \square$$

OBS: $P(A_j) > 0 \Rightarrow P(B|A_j)$ definierad

Exempel 1.36 Box I: 2 vita och 2 svarta kulor

Box II: 3 vita och 4 svarta kulor.

Välj boxen på måfå, och dra därefter 1 kula. Vilken är sl att kulan är vit?



Lösn. Låt A_I = box I väljs

B = vit kula dras

totala sl-lagen $\Rightarrow$

$$P(B) = P(B|A_I)\,P(A_I) + P(B|A_I^c)\,P(A_I^c)$$

Boxarna väljs på måfå $\Rightarrow$ $P(A_I) = P(A_I^c) = \frac{1}{2}$

$P(B|A_I) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ sl för vit kula i box I.

$P(B|A_I^c) = \frac{3}{7}$ sl för vit kula i box II.

box II väljs

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} = \frac{13}{28}$$

□

Bayes = "beis"

Bayes' formel (statistik) Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, $B \in \mathcal{F}$ händelse med $P(B) > 0$. Anta: familjen $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{F}$ en partition av Ω med $P(A_j) > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Då gäller för betingad sl

(Bayes) $$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$ då $k = 1, \dots, n$

sl för A_k med villkoret B

Bevis betingad sl (definition): för $k = 1, \dots, n$ gäller

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$\overset{1.7}{=} \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

sätt in totala sl-lagen

□.

Bayes' formel används för statistisk "inversion": $P(A_k|B)$ hittas från betingade sl $P(B|A_j)$, $j = 1, \dots, n$

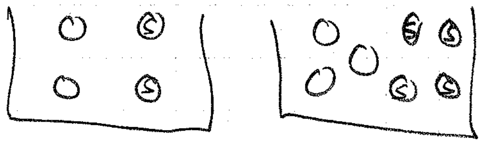
Exempel 1.36 forts. (forts. på Exempel s. 47)

Box I: 2 vita och 2 svarta kulor

Box II: 3 vita och 4 svarta kulor

Boxen väljs på måfå, och därefter dras en kula från boxen.

Anta att den dragna kulan är vit.
Vilken är sl att kulan drogs från Box II. ?



I

Lösn. Bayes' formel!

Låt $B =$ vit kula dras

$A_I =$ box I. väljs

betingad sl

$$P(A_I^c \mid B) \overset{(B)}{=} \frac{P(B \mid A_I^c) \cdot P(A_I^c)}{P(B)}$$

Box II. väljs

villkor: vit kula

Ex. ① $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{13}{28}$

$P(A_I^c) = \frac{1}{2}$, $P(B \mid A_I^c) = \frac{3}{7}$ (sl för vit kula från box II.)

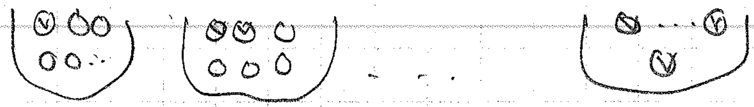
$$\Rightarrow \quad P(A_I^c \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{13}{28}} = \frac{3}{14} \cdot \frac{28}{13} = \frac{6}{13}$$

VARNING: svaret $sl = \frac{3}{5}$ ("proportionen vita kulor i box II mot antalet vita kulor i I och II")
är FEL!

29/11/2015

Exempel 1.37 Anta: N boxar $B_1, \ldots, B_N$

B_k innehåller k vita kulor och $N-k$ svarta kulor



B_1 B_2 . . . B_N

Välj box på måfå och dra därefter på måfå n st kulor från boxen med återläggning.

Anta: alla n kulor är vita.

(i) bestäm sl att boxen var B_k $(k = 1, \ldots, N)$

(ii) bestäm sl att ifall $n+1$ kula dras, så är den vit.

Lösn. Låt $A_k =$ box B_k

$B =$ n vita kulor vid dragning