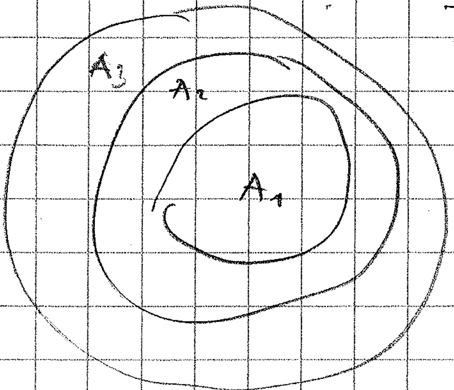
Följande kontinuitetsegenskaper är också viktiga: $\boxed{\text{Sl.-rum: tillägg}}$ (17A)

<u>Monoton konvergens av sannolikheter</u> Anta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sannolikhetsrum,

$$\left.\begin{array}{l} \text{(1) om } A_i \in \mathcal{F} \text{ för varje } i = 1,2,\ldots \\ A_i \subset A_{i+1} \quad \forall i = 1,2,\ldots \\ (A_i) \text{ "monotont växande familj"} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

monotont växande

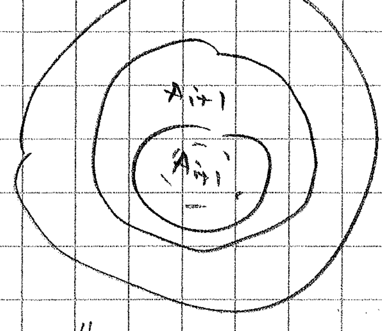


<u>Obs</u> (minnesregel o. specialfall)

Om $A_1 \subset \ldots \subset A_n \Rightarrow$

$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = P(A_n)$

(där $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$)



← "monotont avtagande familj"

(2) Om $A_i \supset A_{i+1} \quad \forall i = 1,2,\ldots$, så

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

<u>Obs</u> om $A_1 \supset \ldots \supset A_n \Rightarrow$

$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = P(A_n)$

<u>Bevis</u> förbigås (exempelvis, "Mått och integral"). $\square$

---

inte 2015

<u>Exempel</u> "σ-algebra" $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$.

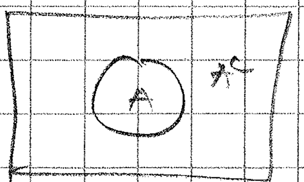
(2015, fri övning)

Ω mängd:

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ trivial σ-alg. på Ω

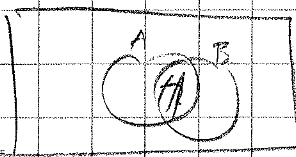
enkla σ-alg.

fixera $A \subset \Omega$ delmängd



$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ σ-alg.

$\subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$



tillsätt $B \Rightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$,

$A^c \cup B$, $A^c \cap B$

$A \cap B^c$, $A \cup B^c$, ...

Exempel: ändliga sl-rum

Exempel 1.10 (asymmetrisk tärning) Betrakta asymmetrisk tärning där sl att få utfallet 1, 2 eller 3 som ögontal är dubbelt så stor som sl att få 4, 5 eller 6. Bestäm sl

$$P(\text{erhåller udda ögontal}).$$

Lösn naturliga utfallsrummet $\{1,2,\ldots,6\}$ med sl

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{2}{9} \quad \text{och} \quad P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{9}$$

(proportionerna 2 : 2 : 2 : 1 : 1 : 1). Låt $A = \{\text{udda ögontal}\}$.

Utfallen 1, 3, 5 disjunkta $\xRightarrow[\text{(AN3) eller 1.7}]{\text{additivitet}}$

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

Komplementmängden $\Rightarrow$

$$P(\text{erhåller jämnt ögontal}) = P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

1.7

□.

1.5. Kombinatorik (systematiskt)

När man tillämpar den klassiska (symmetriska) sannolikhetsmodellen råkar man ofta ut för problemet att det är svårt att beräkna antalen $\#(\Omega)$ och $\#(A)$. För detta behövs klassisk kombinatorik (också matematisk allmän bildning!). Några viktiga specialfall:

A. Permutationer

Låt $n \in \mathbb{N}$. Talet n-fakultet är

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \quad , n \geq 1$$
$$0! = 1 \quad \text{(konvention)}$$

rekursiv formel:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)\, n! & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$

$4! = 6 \cdot 4 = 24$, $5! = 5 \cdot 24 = 120$, $6! = 6 \cdot 120 = 720$

$7! = 7 \cdot 720 = 5040$, $8! = 8 \cdot 5040 = 40.320, \ldots$

Fakultetsfunktionen $n!$ växer mycket snabbt. Stirlings formel approximerar $n!$:

(S) $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

tolkning: $$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

(beviset förbigås; klassisk analys, typ DI övningsarbete)

Låt $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ bestå av n (olika) element. En permutation av E är en ordnad n-tupel

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$$

bestående av olika element från E.

Alternativt: en permutation $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ av E motsvarar entydigt bijektionen $f: E \to E$

motsvarigheten $f(a_k) = a_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$. dvs
$$\begin{array}{c} a_1 \mapsto a_{i_1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_n \mapsto a_{i_n} \end{array}$$

(ofta väljer $E = \{1, \ldots, n\}$)

OBS ordnad n-följd avser

$$(a_1,\dots,a_n)=(b_1,\dots,b_n) \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\dots,\ a_n=b_n$$

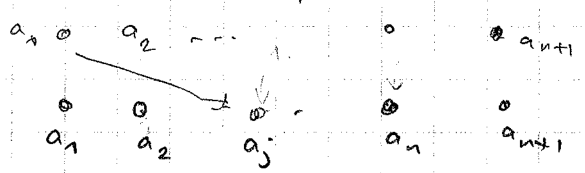
Fr. antalet permutationer om $\#(E)=n$?

Sats 1.11 Antalet permutationer av en mängd med n element är

$$n! \quad (=1\cdot 2\cdots n), \quad n\in\mathbb{N}$$

Bevis: låt P_n = antalet n-permutationer, $n=1,2\dots$

Fr. antalet $(n+1)$-permutationer P_{n+1} ?



1. koordinaten kan väljas på $n+1$ sätt $(\in\{a_1,\dots,a_{n+1}\})$, dvs. $f(a_1)=a_j$

valen av koordinaterna $2,\dots,n+1$ motsvarar alla n-permutationer, dvs alla bijektioner $\{a_2,\dots,a_{n+1}\}\to\{a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_{n+1}\}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} P_{n+1}=(n+1)\,P_n \\ \text{antalet 1-permutationer} \quad P_1=1=1! \end{array}\right\} \Rightarrow P_k=k!, \quad k=0,1,2\dots$$

$\square$

Exempel $E=\{a,b\}$ har 2 permutationer:

$(a,b),\ (b,a)$

Exempel 1.12

(i) $E=\{a,b,c\}$ har 6 permutationer:

$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)$

Beteckning: (c,b,a) avser perm. $a\mapsto c,\ b\mapsto b,\ c\mapsto a$

(ii) 9 personer kan bilda

$$9! = 9\cdot \underbrace{40.320}_{8!} = 362.880$$

olika köer

(iii) 52 kort i en kortlek kan vara i

$$52! \approx 8{,}1\cdot 10^{67}$$

olika ordningar (= "blandningar")

20.9

B. Multiplikationsprincipen (allmän princip)

Anta att vi utför ett försök i k operationer, så att

1. operationen har n_1 möjligheter
2. operationen har n_2 möjligheter (oberoende av 1 oper.)

$\vdots$

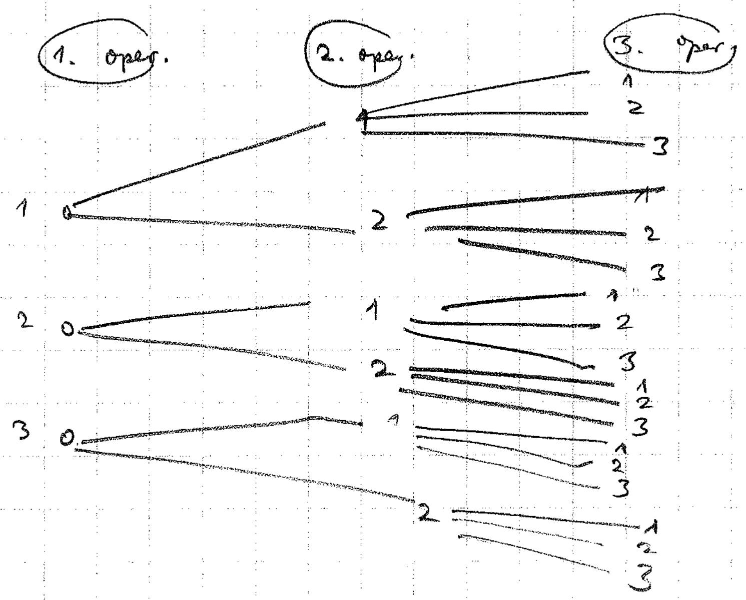
allmänt: j:e operation har n_j möjligheter (oberoende av $j-1$ första operationerna).

Då har försöket

$$n_1 \cdot n_2 \cdots \circ n_k$$

(olika) resultatmöjligheter.
utfalls-

Kan (ibland) visualiseras med "träddiagram": $n_1 = 3,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3.$

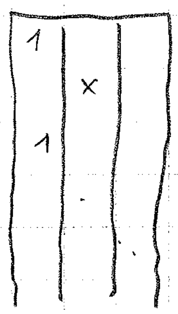


$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ möjligheter

Exempel 1.13 En tipsrad (= veikkausrivi) med 13 objekt är en ordnad följd

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{13}),$$

där $x_j \in \{1, x, 2\}$ då $j = 1, \ldots, 13$ (3 oberoende möjligheter).



$\Rightarrow$

$$\text{antalet rader} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{13} = 3^{13} = 1.594.323$$

Anta att tipsraden fylls på måfå (= alla rader lika sannolika = klassiska Sl-modellen).

Betrakta händelserna

$A =$ fullträff (dvs. 13 rätt av 13)

$B =$ åtminstone 1 objekt rätt.

$\Rightarrow$ erhåller sannolikheterna

$$P(A) = \frac{1}{3^{13}} \cong 6.27 \cdot 10^{-7}$$

$$P(B) = 1 - \underbrace{P(B^c)}_{\text{alla 13 objekt fel}} = 1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{13} \approx 0.995$$

Tillämpning av B: anta $E = \{w_1, \ldots, w_n\}$ har n (olika) element. Då har

E 2^n olika delmängder $(= \#(\mathcal{P}(E))$, $\mathcal{P}(E) =$ potensmängden till E, dvs $\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}$.)

orsak: $A \subset E \Rightarrow$

(oberoende) möjligheterna $w_1 \in A$, $w_1 \notin A$, dvs

$\vdots$

$w_k \in A$, eller $w_k \notin A$ (oberoende av $w_1, \ldots, w_{k-1}$) för $k = 2, 3, \ldots, n$

Multiplikationsprincipen $\Rightarrow$

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ st}} = 2^n$ möjligheter för delmängder $A \subset E$

Exaktare bevis: induktion på $n = \#(E)$.

OBS: inte ett bevis, eftersom multiplikationsprincipen inte "bevisats" exakt!

C. Summaprincipen

Anta att ett försök kan utföras med k operationer, som utesluter varandra ("exklusiva"), så att

Obs: skillnad till B ovan: operationerna inte oberoende av tidigare oper.

1. operationen har n_1 möjligheter
2. operationen har n_2 —"—

$\vdots$

k:s operation har n_k —"—.

Då har försöket

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

(olika) resultat möjligheter.
utfalls-

* D. Variationer och kombinationer

Anta $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ (olika element), $n \in \mathbb{N}_+$, samt $1 \leq k \leq n$ $(k \in \mathbb{N})$ är givna.

En **k-variation** av E är en ordnad k-följd $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ av k st olika element från E.

OBS: ordning medräknad

en **k-kombination** av E är en delmängd $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ av k olika element av E

OBS: ordningen inte beaktad

Fr: antalen av dessa?

21.9

Sats 1.14 En mängd E med n element har

(i) $(n)_k \overset{\text{def.}}{\equiv} n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ k-variationer

(ii) $\dbinom{n}{k} \equiv \dfrac{(n)_k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ k-kombinationer

$\binom{n}{k}$: läs "n över k" eller "n välj k"

Bevis: (i) multiplikationsprincipen: om $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ k-variation

$\Rightarrow$ 1. koordinaten har n möjligheter

2. koordinaten har $n-1$ – " –

$\vdots$

k:s koordinaten har $n-(k-1) = n-k+1$ mögl.

Produktregeln $\Rightarrow$ $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ möjligheter

(ii) låt x = antalet k-kombinationer

given k-kombination $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ $\Rightarrow$ kan bilda $k!$ olika k-variationer av elementen $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ (orsak: k-variation = permutation av $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$).

olika k-kombinat. $\Rightarrow$ olika k-variationer

$\Rightarrow$ $x \cdot k! = (n)_k$ $\Rightarrow$

$$x = \frac{(n)_k}{k!} = \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}^{=n!}}{k!\,(n-k)!} = \right) \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

eller direkt (i): $\dfrac{(n)_k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

□ 21/11/2015

Exempel 1.15. (1) $E = \{a,b,c\}$ $\Rightarrow$

2-variationer av E: $(a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b)$
(= ordnade par av olika element)

antal $3\cdot 2 = 6$ (enligt 1.14: $(3)_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$)

2-kombinationer $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ antal $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3.$

1-variationer ? $(a), (b), (c)$ antal 3
1-kombinationer $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ antal $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$!

3-variationer ? antal $3\cdot 2\cdot 1 = 6$
= permutationer på 3 element (tidigare)

3-kombinationer $\{a,b,c\}$, antalet $\binom{3}{3} = 1$

21.9

minus Denis: antal ...

(2) Hur många lottorader finns det? Lotto:

tal $1,\dots,39$
välj 7 st tal } $\Rightarrow$ antalet lottorader
ordningen utan betydelse!

$$\binom{39}{7} = \frac{39\cdot 38\cdots 33}{7!} = 15.380.937 \quad \left(= \frac{(39)!}{7!\,(32)!}\right)$$

Sannolikheten för vinstrad (alla rader lika sannolika = symmetriska sl-modellen)

$$= \frac{1}{\binom{39}{7}} \approx \frac{1}{15.000.000}$$

Matematisk lottoteori (allmän bildning)

Låt a_k = antalet rader med (exakt) k rätt, $0 \le k \le 7$

Kan anta: rätta raden $\{1,\dots,7\}$
fel tal $\{8,\dots,39\}$
"symmetri" (omnumrera talen $1,\dots,39$)

k tal rätt $\Leftrightarrow$ k tal $\in \{1,\dots,7\}$, $7-k$ tal $\in \underbrace{\{8,\dots,39\}}_{32\text{ st.}}$

produktregeln (oberoende)

$$a_k = \binom{7}{k}\binom{32}{7-k} = \frac{7!\;32!}{k!\,((7-k)!)^2\,(25+k)!}$$

k från 7 $\quad$ $7-k$ från 32
(ordningen utan betydelse)

$\boxed{32-(7-k) = 25+k}$

$$\Rightarrow \quad r_k \overset{\text{def.}}{\equiv} \frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{\dfrac{7!\;32!}{(k-1)!\left[(7-(k-1))!\right]^2 (25+k-1)!}}{\dfrac{7!\;32!}{k!\left[(7-k)!\right]^2 (25+k)!}} = \frac{k\,(25+k)}{(8-k)^2}$$

2015 endast skrivna

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_{k-1} = r_k\, a_k}, \quad k = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

$a_7 = \binom{7}{7}\cdot\binom{32}{0} = 1$ och $P(7 \text{ rätt}) = \dfrac{1}{\binom{39}{7}} = \dfrac{1}{15.380.937}$

$r_7 = \dfrac{7\cdot 32}{1} = 224 \Rightarrow a_6 = 224 \Rightarrow P(6 \text{ rätt}) = \dfrac{224}{\binom{39}{7}} = \dfrac{1}{68.665}$

$r_6 = \dfrac{6\cdot 31}{2^2} = \dfrac{93}{2} \Rightarrow a_5 = \dfrac{93}{2}\cdot 224 = 10416 \Rightarrow P(5 \text{ rätt}) = \dfrac{10.416}{\binom{39}{7}} = \dfrac{1}{1.477}$

$r_5 = \dfrac{5\cdot 30}{3^2} = \dfrac{50}{3} \Rightarrow a_4 = 173.600 \Rightarrow P(4 \text{ rätt}) = \dfrac{1}{89}$

$r_4 = \dfrac{4\cdot 29}{4^2} = \dfrac{29}{4} \Rightarrow a_3 = 1.258.600 \Rightarrow P(3 \text{ rätt}) \approx 0.0818$

$r_3 = \dfrac{3\cdot 28}{5^2} \Rightarrow a_2 = 4.228.896 \Rightarrow P(2 \text{ rätt}) \approx 0.275$

$r_2 = \dfrac{2\cdot 27}{6^2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 6.343.344 \Rightarrow P(1 \text{ rätt}) \approx 0.412$

$r_1 = \dfrac{1\cdot 26}{7^2} = \dfrac{26}{49} \Rightarrow a_0 = 3.365.856 \Rightarrow P(0 \text{ rätt}) \approx 0.219$

inga rätt

additiva sl

$P(\text{högst } 2 \text{ rätt}) \approx 0.275 + 0.412 + 0.219 = 0.906$

6 rätt + tilläggsnummer (3 st)

summa principen (3 exklusiva möjligheter)

$a_{6+} = \binom{7}{6}\cdot 3 = 21 \Rightarrow P(6 \text{ rätt} + \text{tilläggsnr}) = \dfrac{21}{15.380.937}$

6 rätt av 7

Exempel 3. Ett lotteri har 100 lotter, varav 10 vinstlotter. Personen P köper 3 lotter. Vilken är sannolikheten att personen får åtminstone 1 vinstlott?

Lösn.:

delmängder med 3 element (utan ordning)

utfallsrum (exempelvis) Ω = 3-kombinationer av 100 $\Rightarrow$

$$\#(\Omega) = \binom{100}{3}$$

A = åtminstone 1 vinst $\Rightarrow A^c$ = ingen vinst bland 3 lotter (komplementhändelse)

$\Rightarrow \#(A^c) = \binom{90}{3}$ (orsak: 3 lotter från 90 utan vinst)

symmetriska sannolikhetsmodellen:

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\#(A^c)}{\#(\Omega)} = 1 - \frac{\binom{90}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{90!}{3!\,87!}}{\frac{100!}{3!\,97!}} = 1 - \frac{90\cdot 89\cdot 88}{100\cdot 99\cdot 98} \approx 0{,}2735$$

<u>Extra problem</u>: hur <u>många</u> lotter n bör P köpa för att sannolikheten för en vinst ovan är $> \frac{1}{2}$?

<u>Lösn</u> A_n = åtminstone 1 vinst bland n lotter $\Rightarrow$

$$P(A_n) = 1 - \frac{\binom{90}{n}}{\binom{100}{n}} = 1 - \frac{\frac{90!}{n!\,(90-n)!}}{\frac{100!}{n!\,(100-n)!}} =$$

$$= 1 - \frac{90\cdot 89 \cdots (90-n+1)}{100\cdot 99 \cdots (100-n+1)} > \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{90\cdot 89 \cdots (90-n+1)}{100\cdot 99 \cdots (100-n+1)} < \frac{1}{2}$$

(*) observera:

$$\frac{90-k+1}{100-k+1} \leq \frac{9}{10} \Longleftrightarrow$$

$$900 - 10k + 10 \leq 900 - 9k + 9$$

$\Longleftrightarrow 0 \leq k-1$ dvs $k \geq 1$.

uppskatta:

$$\frac{90\cdot 89 \cdots (90-n+1)}{100\cdot 99 \cdots (100-n+1)} \overset{(*)}{<} \left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{2} \quad \text{om} \quad n \geq 7$$

eftersom $\left(\frac{9}{10}\right)^7 \approx 0{,}478\ldots$

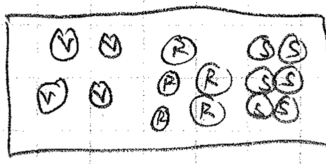
---

inte 2015

↳ <u>Exempel 1.16</u>

En box innehåller 15 kulor:

4 vita, 5 röda, 6 svarta.



Från boxen plockas 3 kulor på <u>måfå</u>. Finn sannolikheten för att bland de 3 kulorna finns

(i) (åtminstone) en vit kula

(ii) (–" –) en röd kula

(iii) (–" –) en vit eller röd kula

(iv) (–" –) en vit och en röd kula

(v) (–" –) en vit kula, men inte en röd

naturligt utfallsrum: Ω = 3-kombinationer av 15 kulor (utan ordning (delmängder med 3))

$$\Rightarrow n(\Omega) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{6} = 13\cdot 35 = 455$$

Låt egentligen $\{$(åtminstone) en vit av 3$\}$

V = (åtminstone) en vit kula (bland 3 upplockade)

R = —"— en röd kula (—"—)

Då är

$$\#(V^c) = \binom{\overset{\text{röda + svarta}}{11}}{3} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{6} = 165$$

ingen vit kula

$$\#(R^c) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120 \quad \Rightarrow$$

ingen röd kula

(i) $$P(V) = 1 - P(V^c) = 1 - \frac{\#(V^c)}{455} = 1 - \frac{165}{455} = \frac{290}{455} \approx 0.637$$

(ii) $$P(R) = 1 - P(R^c) = 1 - \frac{\#(R^c)}{455} = 1 - \frac{120}{455} = \frac{335}{445} \approx 0.736$$

(iii) $$\#(\underbrace{V^c \cap R^c}_{\text{inte röd, inte vit} = \text{svart!}}) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

de Morgan: $(V\cup R)^c = V^c \cap R^c$

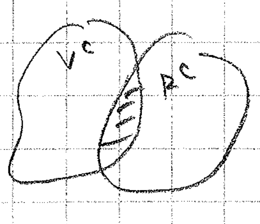
$$P(\underbrace{V\cup R}_{\text{vit eller röd}}) = 1 - P((V\cup R)^c) \overset{\text{de Morgan}}{=} 1 - P(V^c \cap R^c)$$

$$= 1 - \frac{\#(V^c\cap R^c)}{455} = 1 - \frac{20}{455} = \frac{435}{455} \approx 0.96..$$

(iv) $$P(\underbrace{V\cap R}_{\text{vit och röd}}) = 1 - P((V\cap R)^c) \overset{\text{de Morgan}}{=} 1 - P(\underbrace{V^c \cup R^c}_{?})$$

de Morgan: $(V\cap R)^c = V^c \cup R^c$

$$\overset{\text{summaformeln}}{=} 1 - \left(P(V^c) + P(R^c) - P(V^c\cap R^c)\right)$$



$$= 1 - \left(\frac{165+120-20}{455}\right) = 1 - \frac{265}{455} = \frac{190}{455} \approx 0.42..$$

(v) $$P(\underbrace{V\setminus R}_{\text{vit, inte röd}}) \overset{\text{formel}}{=} P(V) - P(V\cap R) \overset{\text{ovan!}}{=} \frac{290}{455} - \frac{190}{455} = \frac{100}{455} \approx 0.22..$$

$\square$

22.9

Exempel 1.17 Matching-/Recontre problemet (klassiskt)

fallet $n=4$ tidigare, s.15

n personer tar med en gåva till lillajulsfest

gåvorna utdelas på måfå (en åt varje person).

Vilken är sl att åtminstone 1 gäst får tillbaka sin egen gåva ?

Lösn

Personer $P_1, \ldots, P_n$. Betrakta händelsen

$$A_j = P_j \text{ får tillbaka sin gåva}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Vi söker $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \; ?$

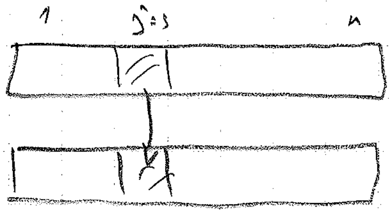
åtminstone en av $P_1, \ldots, P_n$ får tillbaka egen gåva

Kommentar: $n=1,2,3$ direkt (räkna upp alla permutationer)

allmänna summaformeln (kapitel 1.3) $\Rightarrow$

$$(*) \begin{cases} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \\ \qquad \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{cases}$$

"brute force": vi beräknar HS !



$$P(A_1) = \frac{1}{n} = P(A_i), \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{symmetrisk sl}$$

orsak P_j har n möjliga $\Rightarrow P(A_i) = \frac{1}{n}$

Alternativ: gåvor $\rightarrow$ personer motsvarar alla permutationer på n element

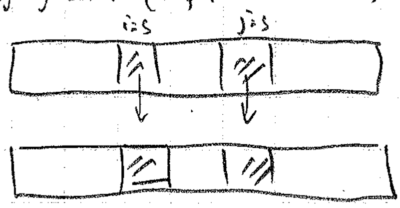
P_j får egen gåva, övriga personer motsvarar $(n-1)$ - permutationer

$$\underset{P_1}{\circ} \quad \circ \quad \circ \quad \underset{P_j}{\circ} \quad \circ \; \ldots \; \underset{P_n}{\circ}$$

$$\Rightarrow \quad P(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$P(A_i \cap A_j)$: P_i, P_j får egna gåvor $\Rightarrow$ $(n-2)!$ möjligheter (= permutationer)

för övriga $(n-2)$ personerna $\Rightarrow$



$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

allmänt personerna $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ får egna gåvor $\Rightarrow$ $(n-k)!$ möjligheter

(övriga $n-k$ personer har $(n-k)!$ olika permutationer)

$$\Rightarrow \quad P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$$

antal termer i summorna:

$$\sum_{i<j\le n} P(A_i \cap A_j) \qquad \binom{n}{2} \text{ antal termer (par } (i,j),\ i<j\le n \text{)}$$

då $\{i,j\}$ identiferas med (i,j), där $i<j$ (utan ordning)

allmänt

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P(\ \cdot\ ) \qquad \binom{n}{k} \text{ antal termer}$$

Insättning i $(*)$ $\Longrightarrow$ $\left(1.\text{termen} \quad n\cdot\frac{1}{n} = 1 = \binom{n}{1}\cdot\frac{(n-1)!}{n!}\right)$

$$P(A_1\cup\ldots\cup A_n) = n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\cdot\frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$\boxed{\binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}\quad, k=1,2,\ldots,n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

OBS Analys II (Taylor serie för e^x med $x=-1$) $\Rightarrow$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots$$

$\boxed{\text{1. termer i serien: } 1-1=0}$

$$\Rightarrow \quad P(A_1\cup\ldots\cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \approx 1-\frac{1}{e} \approx 0.632$$

Alltså: n "stort" $\Rightarrow$ så $P(A_1\cup\ldots\cup A_n)$ beror mycket litet på n. (redan från $n=3,4,\ldots$)

(exempelvis $P(A_1\cup\ldots\cup A_5) \approx 0.633\ldots$)

$\square$

Kommentar: Exempel 1.17 har allmän matematisk tolkning

$P(A_1\cup\ldots\cup A_n)$ anger proportionen

$$\frac{\#(n\text{-permutationer som fixerar åtminstone ett element})}{\#(\text{alla } n\text{-permutationer})}$$

n permutation fixerar j:s element.

$$\underset{1}{\circ} \quad \circ \quad \circ \quad \underset{j}{\overset{\circlearrowleft}{\circ}} \quad \circ \quad \circ \quad \underset{n}{\circ}$$

$\boxed{f \text{ fixerar } j\in\{1,\ldots,n\} \text{ om } f(j)=j}$

komplementet $(A_1\cup\ldots\cup A_n)^c = A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c$ $\longleftrightarrow$ n-permutationer som inte fixerar något element

5. Binomialkoefficienternas egenskaper

Binomialkoefficienter $\binom{n}{k} \overset{\text{def.}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

då $n = 0, 1, 2, \ldots,\quad 0 \le k \le n.$

"n över k"

D $\Rightarrow$ $\binom{n}{k}$ = antalet delmängder med k element från basmängd med n element ("n välj k").

konvention: $\binom{n}{k} = 0$ om $k < 0$ eller $k > n$. (ifall behöver)

egenskaper:

Sats (i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ symmetri

(iii) $\binom{n}{1} = n$

(iv) Pascals regel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

(v) (Newtons) binomialformel: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \left(\overset{\text{symm}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} b^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} a b^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2!}} a^2 b^{n-2} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} a^{n-1} b + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^n$$

Bevis (i), (ii), (iii) direkt från definitionen, exempelvis

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{\underbrace{0!}_{=1}(n-0)!} = 1, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \ \ldots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \overset{k = n-(n-k)}{=} \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

(iv)
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{\overset{n-k+1}{n!}}{k!\,(n-k)!} + \frac{\overset{k}{n!}}{(k-1)!\,[n-(k-1)]!}$$

$$= \frac{\overbrace{(n+1)n!}^{(n+1)!} - k\cancel{n!} + k\cancel{n!}}{k!\,\underbrace{(n-k+1)}_{(n+1)-k}!} = \binom{n+1}{k}$$

(v)
$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ st}}$$

$\overset{\text{multi-}}{\underset{\text{plicera!}}{=}}$ summa av termer $\underbrace{abaab\dots ab}_{n\text{ st}} = a^k b^{n-k}$ (k st a, n−k st b.)

$\binom{n}{k}$ olika sätt välja k st a.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \left(\overset{\text{symm.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right).$$

□.

OBS ① tolkning: Pascals triangel från

$1 \leftarrow (0,0)$	0. te	raden
$(1,0) \to$ 1 1	1.	
1 2 1	2.	
1 3 3 1	3.	
1 4 6 4 1		
⋮		
$(n-1,k-1)$ ∘ ∘ $(n-1,k)$	(n−1):ta	raden
$\circ$ $(n,0)$ . . . $\circ$ (n,k) . . . $\circ$ (n,n)	n:te	raden

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(också: $\binom{n}{k}$ anger antalet stigar att nå plats (n,k) från toppen av pyramiden)

② speciellt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, då $n = 0,1,2\dots$, $0 \le k \le n$.

(alternativt: antal k-kombinationer av n element ⇒ naturligt tal)

Korollarium 1.19
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n = 0,1,2\dots$$

obs samtidigt antalet element i $P(E)$ då $E = \{a_1,\dots,a_n\}$.

Bevis $a = b = 1$ i Newtons formel ⇒
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^k 1^{n-k}}_{=1} = (1+1)^n = 2^n.$$

□.

1.6. Sannolikhetsmodeller med symmetriska sannolikhetsrum (mera)

<u>Anta</u> (≈ statistik etc) Population med N individer, som har/inte har en given egenskap P.

<u>Problem</u> studera populationen genom att välja individer <u>på måfå</u> (= slumpmässigt)

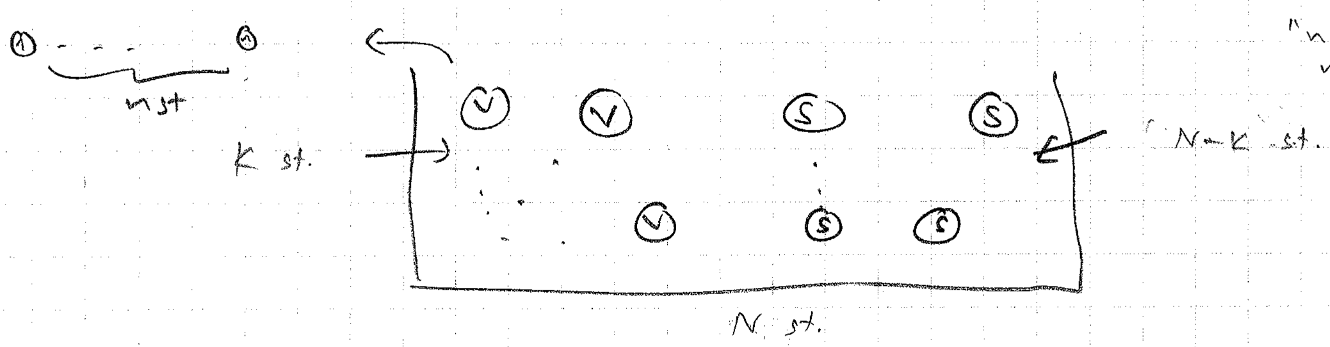
$\Rightarrow$ 2 väsentligen olika möjligheter

(A) dragning utan återläggning

(B.) — " — med återläggning

<u>Urnmodell</u> N kulor, K vita kulor, $N-K$ svarta kulor

"neutral modell"



(A) <u>Dragning utan återläggning</u> anta $n \in \mathbb{N}_{+}$, $n \leq N$.

drag n kulor <u>på måfå</u> (utan återsättning)

<u>Sannolikhetsrum</u>: n-kombinationer av N element (<u>alla</u> n-delmängder lika sannolika och <u>utan</u> ordning).

(D) $\Rightarrow$ antalet möjligheter $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

Låt A_k = dragningen har <u>exakt</u> k vita kulor (och $n-k$ svarta)

$k = 0, 1, \ldots, n$.

<u>Multiplikationsprincipen</u>.

$\boxed{\text{jämför: Lotto-matematik s. 23-24}}$

dragning av vita kulor: $\binom{K}{k}$ möjligheter (K st. vita)

(oberoende) dragning av svarta kulor: $\binom{N-K}{n-k}$ möjligheter (antal kvar att välja)

$\Big\}\ \xrightarrow{\text{vita/svarta}}$ oberoende

$\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}$ möjligheter $\Rightarrow$ symmetrisk SR

$$P(A_k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq K \\ 0 \leq n-k \leq N-K \end{array} \right)$$

27.9

(B.) Dragning med återläggning $\quad n \in \mathbb{N}_+,\ n \le N.$

drag n st kulor med återläggning:

1. kulan på måfå av N st., studera, samt returnera till boxen
2. kulan på måfå av N st, — " —

⋮

n:te kulan — " —

Modell symmetriskt utfallsrum

$$\Omega = \text{alla } n\text{-följder från } \{1, \dots, N\}$$
$$= \{1, \dots, N\}^n \qquad \text{(tillåter upprepning)}$$

$$\Rightarrow \quad \#(\Omega) = N^n \qquad \text{(multiplikationsprincipen)}$$

Händelse

$A_k =$ exakt k vita kulor $\quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$

antalet möjligheter:

1 | | V | | V | V | | V | V | |

- $\binom{n}{k}$ platser för vita kulor i n-följderna (k platser av n).
- för varje plats K^k st sätt välja vita kulor (motsvarar $\{1, \dots, K\}^k$, K st vita)
- på resterande $n-k$ platser $(N-k)^{n-k}$ svarta möjligheter

summa + ⟹ multipl. principen

$$\binom{n}{k} \underbrace{K^k (N-K)^{n-k}}_{\text{(fixerad) plats, multipl.}} \qquad \text{möjligheter}$$

summera exklusiva plats möjligheter

$$\Rightarrow \quad P(A_k) = \frac{\binom{n}{k} K^k (N-K)^{n-k}}{N^n} \qquad k = 0, \dots, n$$

illustrera

Exempel 1.20 Boxen innehåller 6 vita och 10 svarta kulor. Sl. för antalet vita kulor i dragning av 8 kulor

(i) utan återläggning
(ii) med återläggning

Hänvisa: s. 33-34

$A_k = \{$ dragningen innehåller (exakt) k vita kulor $\}$ $k=0,\ldots,8$

33

$\boxed{K=6,\ N=16 \quad N-K=10,\ n=8}$

(i) Ⓐ $\Rightarrow$

$$P(A_k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{10}{8-k}}{\binom{16}{8}}, \quad k=0,\ldots,8$$

OBS $\binom{6}{8} = 0 = \binom{6}{7}$ konvention

(ii) Ⓑ $\Rightarrow$

$$P(A_k) = \binom{8}{k} \cdot \frac{6^k\, 10^{8-k}}{16^8}, \quad k=0,..8$$

$\boxed{-\text{ıı}-}$

Tabell [T], s. 34

k	a) ilman takaisinpanoa $P(A_k)$	b) takaisinpanolla $P(A_k)$
0	0.0035	0.0233
1	0.0559	0.1118
2	0.2448	0.2347
3	0.3916	0.2816
4	0.2448	0.2112
5	0.0559	0.1014
6	0.0035	0.0304
7	0	0.0052
8	0	0.0004
$\sum$	1.0000	1.0000

Huomautus 1.6.3 Jos otoskoko n on pieni verrattuna sekä valkoisten että mustien pallojen lukumäärään (kuten käytännössä usein on laita) tapauksissa a) ja b) saadaan likimain samat tn:t ("otanta äärettömästä populaatiosta").

Exempel 2 statistisk kvalitets kontroll

varuparti 20 enheter, kontrollera på måfå 6 st utan återläggning.

Anta: ett parti innehåller 8 st defekta enheter

Vilken är sl att man vid kontrollen erhåller

(i) endast korrekta enheter,

(ii) exakt 3 defekta enheter,

(iii) åtminstone en defekt enhet ?

$\boxed{\begin{array}{c} A_k = \text{exakt } k \text{ st defekta bland } 6, \\ \text{utan återläggning} \\ N=20,\ K=8,\ N-K=12 \end{array}}$

Lösn. korrekt = svart, defekt = vit

(i) $P(\text{endast korrekta}) = P(A_0)$

$$\Downarrow \quad \underset{k=0}{\overset{Ⓐ}{=}} \frac{\binom{8}{0}\cdot\binom{12}{6}}{\binom{20}{6}} = \frac{\frac{12\cdot 11\cdots 7}{6!}}{\frac{20\cdot 19\cdots 15}{6!}} = \frac{77}{3230} \simeq 0.024$$

Exempel 1.21 (statistisk kvalitetskontroll, re Ex 3, sid 2)

Från varupartier på 1000 enheter kontrolleras 75 slumpmässigt valda enheter:

* om finner ≤ 2 defekta enheter, så godkänns partiet
* om finner ≥ 3 defekta enheter, så returneras partiet.

Anta varupartiet (1000 enheter) innehåller 20 defekta enheter. Vilken är sannolikheten att partiet godkänns (dvs. man finner ≤ 2 defekta) i kontrollen?

Lösn motsvarar dragning utan återläggning (jfr lottoraden etc)

Låt $A_k = \{\text{exakt } k \text{ st defekta enheter hittas}\}$ $k = 0, 1, .., 20$

numrera defekta $\{1, .., 20\}$, korrekta enheter $\{21, .., 1000\}$

A_k betyder: k st från defekta, $75-k$ från korrekta enheter

fall (A) med $N = 1000$, $K = 20$, $n = 75$ och $k \in \{0, .., 20\}$ ger

antalet möjligheter a_k för A_k är

$$a_k = \binom{20}{k}\binom{980}{75-k} \quad \text{möjligheter}$$

utfallsrummet $\Omega = \{\text{alla delmängder av 75 enheter från 1.000}\}$, där

$$\#(\Omega) = \binom{1000}{75}$$

Sökta sannolikheten är

obs även 0 st defekta relevant!

$$P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) \overset{\text{disjunkta}}{=} P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$$

$$= \frac{\binom{20}{0}\binom{980}{75} + \binom{20}{1}\binom{980}{74} + \binom{20}{2}\binom{980}{73}}{\binom{1000}{75}} = .. = ?$$

exempelvis

$$P(A_0) = \frac{\overbrace{\binom{20}{0}}^{=1}\binom{980}{75}}{\binom{1000}{75}} = \frac{(980)!}{(75)!\,(980-75)!} \Bigg/ \frac{(1000)!}{(75)!\,(1000-75)!}$$

$$= \frac{(980)!}{(1000)!} \cdot \frac{(925)!}{(905)!} = \frac{(925)(924)\cdots(906)}{(1000)(999)\cdots(981)} = .. = ?$$

D.

22/1/2015