SANNOLIKHETSLÄRA I (1999) INTRODUKTION TILL SANNOLIKHETSKALKYL (2015)

0. Introduktion: några typiska problem (återvänder senare till detaljer)

1. Födelsedagsproblemet

Vilken är sannolikheten att åtminstone 2 personer från en godtycklig kollektion av n personer har samma födelsedag? (anta $n < 365$)

Svar: (bortse från skottår, d.v.s. år = 365 dagar)

sannolikheten $p_n = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^n}$ (p_n = ovanstående sl.)

Här är $p_n > \frac{1}{2}$ om $n \geq 23$.

OBS: $n > 365 \Rightarrow$ i varje kollektion med n personer finns åtminstone 2 personer med samma födelsedag. ("boxprincipen")

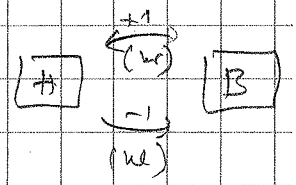
2. Hasardspelarens ruin (1600 – 1700 tal)

Hasardspelaren H har startkapitalet k enheter ($k = 1, 2, \ldots$), och H spelar följande myntkastspel med banken B:

vid varje steg kastas ett symmetriskt mynt (sannolikhet för krona = sannolikhet för klave $= \frac{1}{2}$) så att

om utfall kr (= krona) $\Rightarrow$ H erhåller 1 enhet av B

om utfall kl (= klave) $\Rightarrow$ H förlorar 1 enhet till B



Låt $N \in \mathbb{N}$ vara ett givet (stort) tal, $N > k$. Myntspelet fortsätter tills endera

- H ruineras (kapitalet 0 enheter), eller
- H uppnår N enheter.

Vilken är sannolikheten att H ruineras utgående från startkapitalet k (där $k \in \{1, \ldots, N-1\}$)?

Svar (senare): låt A_k = H ruineras från startkapitalet k $\Rightarrow$

sannolikheten för $A_k = 1 - \dfrac{k}{N}$

Tolkning:

Om $k \ll N \Rightarrow$ (mycket) stor sannolikhet att H ruineras!

(3.) Stickprovskontroll (statistikproblem)

Från varupartier med 1.000 enheter kontrolleras 75 slumpmässigt valda enheter:

- ≤ 2 st defekta kontrollenheter $\Longrightarrow$ hela partiet godkänns
- ≥ 3 st defekta —"— $\Longrightarrow$ hela partiet underkänns

Anta: ett varuparti innehåller 20 defekta enheter. Vilken är sannolikheten att partiet godkänns i kontrollen?

Lösning (senare): motsvarar urnmodellen utan återläggning

(4.) Mätfel av fysikaliska storheter

Anta att en fysikalisk storhet har värdet x. Vid n st mätningar erhålls närmevärdena

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

beroende på slumpmässiga variationer. Hur stor är avvikelsen (felet)

$$\left|x - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right| \quad \left|x - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j}_{\text{aritmetiska medeltalet av mätvärdena}}\right| \quad (\text{då } n \to \infty)\ ?$$

Senare: "slumpmässig" tolkas som oberoende normalfördelade avvikelser (stora talens lag osv).

Probabilistiska metoder är centrala och mycket användbara, exempelvis inom

- statistik
- fysik
- datologi etc

Sannolikhetslära I (= SL I) utgör en introduktion till

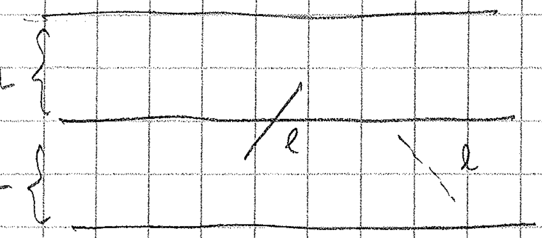
- fundamentala probabilistiska begrepp
- den centrala teorin *
- med tyngdpunkten på exempel (ofta överraskande!).

Den exakta matematiska formuleringen av sannolikhetsläran förutsätter begrepp från kursen "Mått och integral", som inte används i kursen SL I.

inte 2015

5. **Buffons nålproblem** (1733) geometriskt problem

Anta planet $\mathbb{R}^2$ (= papper) har parallella linjer med avståndet L från varandra. En nål (= segment) med längden $\ell \le L$ kastas på måfå på planet. Vilken är sl att nålen berör någon av linjerna?



Obs bör tolka "på måfå"

Svar: $sl = \frac{2\ell}{\pi L}$ (2-dim. fördelningsfunktion; känner ?) utanför ISK

+ många fler typer av exempel

6. exempel på vad teorin ger

Anta symmetriskt mynt (krona / klave) singlas n ggr. Låt

S_n = antalet kronor (bland n singlingar).

Då gäller: för varje givet $\varepsilon > 0$ har man att

sannolikheten för händelsen $\left\{ \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{S_n}{n} < \frac{1}{2} + \varepsilon \right\} \longrightarrow 1$

då $n \to \infty$.

(dvs $\frac{S_n}{n}$ = proportionen av antalet kronor i serie av n myntsinglingar)

Specialfall av stora talens lag (sannolikhet man ?)

Vi övergår till den matematiska formuleringen av sannolikheter. En fullständig version av sannolikhetsläran kräver dock begrepp från måtteori (kursen Mått och integral), som inte kommer att användas på ISK.

1. Sannolikhet

1.1. klassisk (symmetrisk) sannolikhet

enklaste icke-triviala exemplet

diskreta fallet

Fixera $n \in \mathbb{N}$. Anta:

$\omega_1, \dots, \omega_n$ alla möjliga utfall (= alkeistapaus) till ett försök / experiment

och att $\omega_1, \dots, \omega_n$ lika "sannolika".

Beteckna: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ utfallsrummet (alkeistapausten joukko)

(eller basmängden (perusjoukko).)

Varje delmängd $A \subset \Omega$ är en händelse (tapahtuma).

Sannolikheten $P(A)$ för A är

(1) $$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$ 2015: Beteckna $P(A) = \frac{\#(A)}{n}$,

där $\#(A)$ = antalet element i A.

(där $n(A)$ = antalet element i A, $n = n(\Omega) = n(\{\omega_1, \dots, \omega_n\})$)

OBS (i) (1) $\Rightarrow$ $P(\omega_j) = \frac{1}{n}$ $\forall j = 1, \dots, n$ (beteckning: $P(\omega_j) = P(\{\omega_j\})$)

symmetrisk sl.

(ii) $0 \leq P(A) \leq 1$ $\forall A \subset \Omega$

Exempel 1.1. (symmetriskt myntkast el. myntsingling).

elementära utfall

ω_1 = krona

ω_2 = klave

$\Rightarrow$ utfallsrum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

$P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{2}$ (ett "symmetriskt" mynt)

Icke-symmetrisk mynt: fixera $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$ och def. $P(\omega_1) = p$, $P(\omega_2) = 1 - p$

påminn (sve): klave / klaven, klaver (pl.)

Exempel 1.2. Ett symmetriskt mynt kastas 3 ggr. Vilken är sannolikheten att man erhåller åtminstone en krona?

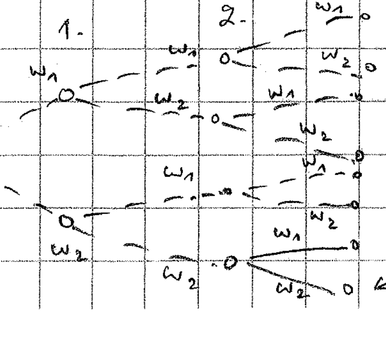
påminn: $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in A\}$.

ω_1 = krona, ω_2 = klave

även $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$ (en klave)

utfallsrummet $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}^3$

illustreras av



utfall $(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$

utfall $(\omega_2, \omega_2, \omega_2)$

$\Rightarrow$ $n(\Omega) = 2^3 = 8$

A = {åtminstone en krona} $\Rightarrow$ $n(A) = 7$

i (a_1, a_2, a_3)

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{n(A)}{8} = \frac{7}{8}$

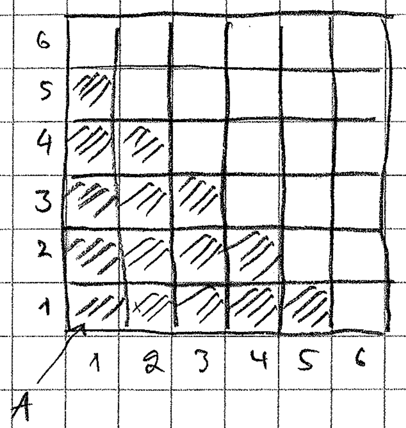
Ex. 1.3. 2 (symmetriska) tärningar kastas (5.)

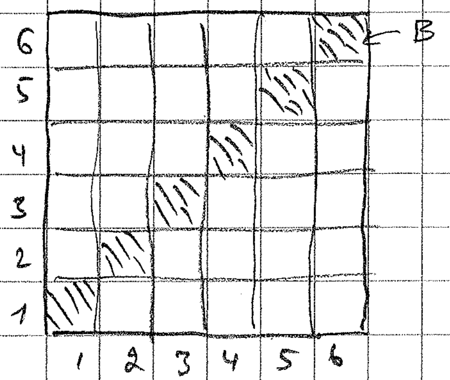
$\Rightarrow$ utfallsrum $\Omega = \{(1,1),(2,1),\dots,(6,1),(2,1),\dots,(6,6)\}$
$= \{1,2,\dots,6\}^2$ poängtal $1,\dots,6$.

Låt

$A = \{$ poängsumman $\leq 6 \}$ dvs $x_1 + x_2 \leq 6$ då $(x_1, x_2) \in \Omega$

$B = \{$ båda tärningarna har samma poängtal $\}$ dvs. $x_1 = x_2$ då $(x_1, x_2) \in \Omega$





$$\left.\begin{aligned} n(\Omega) &= 36 \\ n(A) &= 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$(= 5+4+3+2+1)$

$n(B) = 6 \Rightarrow$, $P(B) = \dfrac{n(B)}{36} = \dfrac{1}{6} \approx 0.167$

(välblandad)

Ex 1.4 Ur en kortlek med 52 kort delas 5 kort.

Utfallsrum $\Omega = \{ \omega : \omega$ delmängd med 5 kort ur kortleken $\}$ (ifall välblandad!)

$\Rightarrow n(\Omega) = \binom{52}{5} \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{52!}{5!\,47!}$ där $k! = 1 \cdots k$ (k-fakultet)

senare: ~~antalet~~ delmängder med 5 element av 52

$= 2.598.960$ $\left(= \dfrac{(52)(51)(50)(49)(48)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right)$

Låt $A =$ alla 4 ässen erhålls

$B =$ alla 5 korten i följd i samma land

Bestäm sannolikheten för händelserna A och B.

Lösn.

$n(A) = 48$

motivering: $\underbrace{\boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{A}}_{\text{4 fixerade kort}}\ \boxed{k}$ $52 - 4 = 48$ möjligheter

OBS: korten betraktas som mängd, dvs. utan ordning!

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{240}{2.598.960} \approx 0.0000925$

$n(B) = 4 \cdot 9 = 36$ (9 möjligheter i varje land) $\Rightarrow P(B) = \dfrac{36}{2.598.960}$

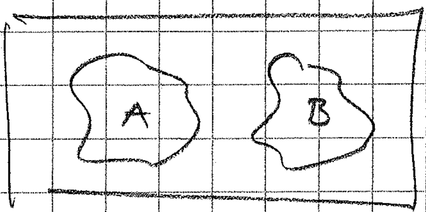
Övan: Den klassiska sannolikheten har följande egenskaper:

(i) $P(A) \geq 0$, $A \subset \Omega$ händelse

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset \overset{\text{disjunkta}}{\Rightarrow} P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(orsak: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$).



Ω

påminn

$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A$ eller $x \in B\}$

unionen av A och B.

Från definitionen följer (se även kap 1.3, allmänt i sl-rum).

$P(\emptyset) = 0$ $\quad\emptyset$ = tomma mängden

$0 \leq P(A) \leq 1$, $\quad A \subset \Omega$

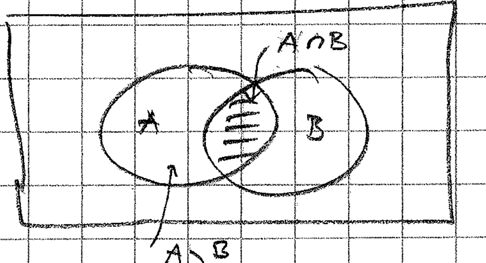
$P(A^c) = 1 - P(A)$, där $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$ komplementet till A (komplementmängden)

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$, där $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ differensmängden

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

obs elementen i $A \cap B$ räknas "dubbelt"



Dessa egenskaper hjälper att beräkna många fler sannolikheter:

Ex. 1.5 (Födelsedagsproblemet exakt)

Vilken är sannolikheten att åtminstone 2 personer har samma födelsedag bland n godtyckliga personer? (anta: $n \leq 365$)

utfallsrum $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$ alla n-följder av 365 dagar (utan att beakta skottår)

$\Rightarrow n(\Omega) = (365)^n$ ((person k_j har f.d. $d_j \in \{1, \ldots, 365\}$, $j = 1, \ldots, n$)

Låt $A = \{$åtminstone 2 personer har samma födelsedag$\}$

$\Rightarrow$ komplementmängden

$$A^c = \{\text{alla } n \text{ personer har } \underline{\text{olika}} \text{ födelsedagar}\}$$

$\Rightarrow$ antalet $n(A^c) = 365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)$

1. har 365 möjligheter, 2. har 364…, kvarstående möjligheter för n:te pers

$\Rightarrow$ $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \dfrac{n(A^c)}{365^n} = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{(365)^n}$ (oran)

numeriska försök ger:

$n \geq 23 \Rightarrow P(A) > \frac{1}{2}$

$n \geq 41 \Rightarrow P(A) > \frac{9}{10}$ (stor sannolikhet!)

14/11 2015

Relativ frekvenstolkning

Fråga: vad är sannolikhet
- frekvenstolkning
- unika händelser? (vad är sl om händelsen inte kan upprepas?)

symmetriska sl-modellen: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ utfallsrum,

(*) $$P(\omega_j) = \frac{1}{n} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Problem:
- hur verifiera i praktiken att (*) gäller (dvs. symmetri)?
- är non-symmetri naturlig?

Exempel A 2 symmetriska mynt kastas. Låt

$\omega_1 =$ åtminstone en krona

$\omega_2 =$ två klaver

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

ω_1, ω_2 inte symmetriska: upprepa myntkasten n ggr (oberoende, identiska upprepningar)

$\Rightarrow$

relativa frekvensen av ω_1: $\dfrac{n(\omega_1)}{n} = \dfrac{\text{antalet utfall av } \omega_1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4}$

Motivering "korrekt" utfallsrum $\Omega_0 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} = \{0,1\}^2$,

där $0 =$ krona, $1 =$ klave

$A = \{(0,0), (0,1), (1,0)\} \Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{4}$

$A = \{\text{erhåller åtminstone en krona}\}$.

Exempel B kön av (nyfödda) barn

ω_1 = pojke
ω_2 = flicka utfallsrum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

empiriskt $\Rightarrow$ relativa frekvensen $P(\omega_2) \cong 0.512$
$P(\omega_1) \cong 0.488$

$\Rightarrow$ möjligheten

$$P(\omega_1) = p \in (0,1), \quad P(\omega_2) = 1 - p$$ naturlig

där $0 < p < 1$ (icke-symm. om $p \neq \frac{1}{2}$)

OBS senare: Bernoullis sats (stora talens lag) $\Rightarrow$

relativa frekvensen
av händelsen A
i n identiska (oberoende)
upprepningar

$$\frac{n(A)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} P(A)$$

Omvänt: sannolikhet $\rightarrow$ relativ frekvens vid upprepningar

$\leftarrow$ s. 8 1/2

Frekvenstolkningen av sannolikheter "klumpig". I stället:

1.2. Den axiomatiska definitionen av sannolikheten (Kolmogorov)

Sannolikhetsrum: matematisk modell för sannolikheten.

dvs sannolikhet def. axiomatiskt

Sannolikhetsrum omfattar:

- utfallsrummet Ω (= mängden av alla möjliga utfall av ett slumpmässigt försök)

- en ~~fixerad~~ =given kollektion $\mathcal{F}$ av delmängder till Ω, dvs. $\leftarrow$ σ-algebra

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \stackrel{\text{def.}}{\equiv} \{A : A \subset \Omega \text{ delmängd}\}$$

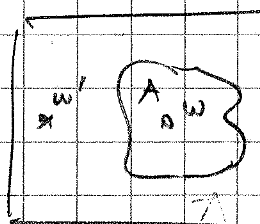
Potensmängden till Ω.

- ett sannolikhetsmått $P: \mathcal{F} \to [0,1]$

Terminologi: Mängden $A \in \mathcal{F}$ är en händelse (tapahtuma)

Händelsen $A \in \mathcal{F}$ inträffar (i försöket) om utfallet $\omega \in A$

inträffar inte (–"–) om $\omega \notin A$



OBS klassiska Ω-modellen (1.1, kap.) $\Rightarrow$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \text{alla delmängder}$$

(då $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ändlig).

I allmänhet är detta inte möjligt $\Longrightarrow$ i stället använder man

Kollektionen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ av delmängder till Ω är en
<u>σ-algebra</u>, om

(σA_1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(σA_2) om $A \in \mathcal{F} \Rightarrow$ komplementet $A^c \in \mathcal{F}$

där $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$

+ (σA_3) om $A_i \in \mathcal{F}$ för $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Ovan: numrerbar union definieras som

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ för något } i \in \mathbb{N}\}$$

Villkor (σA_3) $\Rightarrow$ numrerbara unioner bevaras i $\mathcal{F}$ (om $A_i \in \mathcal{F}$ $\forall i \in \mathbb{N}$)

Även: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow$ även ändliga unioner bevaras i $\mathcal{F}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$$

(välj $A_j = \emptyset$ i (σA_3) för $j = i+1, i+2, \ldots$)

<u>Sannolikheten</u> är en <u>avbildning</u> $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ så att

(TN_1) $P(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{F}$

(TN_2) $P(\Omega) = 1$

<u>Tolkning</u>: $P(A) =$ "proportionen" av händelsen $A \subset \Omega$ jämfört med Ω.

* (TN_3) (<u>fullständig additivitet</u>): om $A_i \in \mathcal{F}$ ($i \in \mathbb{N}$) och

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ då } i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(för alla par $i \neq j$)

<u>OBS</u> (i) <u>sannolikheten</u> $P(A)$ av en <u>händelse</u> $A \in \mathcal{F}$ ($\Leftrightarrow A \subset \Omega$ delmängd) är ett (entydigt) reellt tal,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

(samt satisfierar (TN_1) – (TN_3))

(ii) om $A_i \cap A_j = \emptyset$ då $i \neq j$, säger A_i och A_j (parvis) disjunkta

(iii) HS i (TN_3): serien $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P(A_i)}_{\geq 0}$ konvergerar (och summan ≤ 1)

Betyder: $\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right)$ konvergerar (växande talföljd)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett <u>sannolikhetsrum</u>, där

$\Omega =$ utfallsrummet, givna $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra $=$ kollektionen av <u>händelser</u>, $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ givet <u>sannolikhetsmått</u> (obs $0 \leq P(A) \leq 1$ för alla $A \in \mathcal{F}$)

- standard axiomen $(\sigma A1)$–$(\sigma A3)$, $(PM1)$–$(PM3)$ tillräckliga för sannolikhetskalkyl!

Exempel: under kursens lopp (kan variera: : $\Omega, \mathcal{F}, P$)

Ex (kap 1.1)
$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$,
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,
$P(\omega_j) = \frac{1}{n}$, $j = 1, \dots, n$
ger sl-rum

samband: probabilistisk tolkning $\Leftrightarrow$ mängdlära

"ordbok":

probabilistisk	beteckning	i mängdläran
utfallsmängd (= alla möjliga resultat av slumpmässigt "försök").	Ω	basmängd, grundmängd
(elementära) utfall	$\omega, \omega_1, \omega_2, \dots$	element till Ω
händelser (där givet utfall $\omega \in A$ eller $\omega \notin A$)	$A, B, C, \dots$	delmängder $\subset \Omega$
kollektion av händelserna	$\mathcal{F}$	σ-algebra på Ω
säker händelse	Ω (exempelvis)	
omöjlig händelse	$\emptyset$ (exempelvis)	tomma mängden
händelserna A eller B (eller båda) inträffar	$A \cup B$	union
A och B inträffar	$A \cap B$	snitt / intersektion
A och B inte samtidigt (A och B utesluter varandra)	$A \cap B = \emptyset$	disjunkta mängder
A inträffar inte	A^c	komplementet till A
A inträffar, men inte B	$A \setminus B$ $= A \cap B^c$	differensmängden $\{x \in \Omega : x \in A, x \notin B\}$ OBS: $A^c = \Omega \setminus A$
om A inträffar $\Rightarrow$ även B inträffar	$A \subset B$	A delmängd av B
åtminstone en av händelserna $A_1, A_2, \dots$ inträffar	$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	numrerbar union
alla händelser $A_1, A_2, \dots$ inträffar	$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \Omega : x \in A_j \text{ för alla } j\}$	numrerbart snitt / intersektion

Exempel anta A, B, C händelser:

händelsen A eller B inträffar, men inte C svarar mot

$$(A \cup B) \cap C^c = (A \cup B) \setminus C$$

1.3. Sannolikhetens fundamentala egenskaper (allmänna egenskaper)

Först egenskaper för σ-algebror Anta: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ godtyckligt sl-rum

Sats 1.6 Låt $\mathcal{F}$ vara en σ-algebra på Ω. Då gäller:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) om $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$

(iii) om $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2 \ldots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Bevis (i) $\emptyset = \Omega^c$ där $\Omega \in \mathcal{F}$, (σA_2)

(ii) använd (σA_3) välj $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_j = \emptyset$, $j \geq 3 \Rightarrow$

$$A \cup B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$$

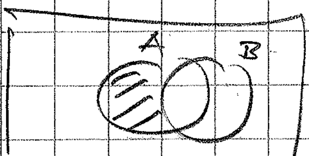
de Morgan (dM) $A \cap B = (A^c)^c \cap (B^c)^c = (\underset{\mathcal{F}}{A^c} \cup \underset{\mathcal{F}}{B^c})^c$

1. delen $+ (\sigma A_2) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Kom ihåg: $(A^c)^c = A$ $\forall$ mängder A

ovan $\Rightarrow$ $A \setminus B = A \cap \underset{\mathcal{F}}{B^c} \in \mathcal{F}$

(enligt (ii) för snittmängden)



(iii) allmänna formen av de Morgan: (se sid 12)

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i^c)^c = \underbrace{\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\in \mathcal{F}}{A_i^c}\Big)}_{\in \mathcal{F} \text{ enligt } (\sigma A_3)}^c \in \mathcal{F}$$ enligt (σA_2)

1h

$\square$

Kom ihåg:

de Morgans lagar:

$$\Big(\bigcup_j B_j\Big)^c = \bigcap_j B_j^c$$

$$\Big(\bigcap_j B_j\Big)^c = \bigcup_j B_j^c$$

där B_j mängder för alla j

(bevis: logik)

(se övn. 1.4 för 2 mängder). eller SYM-kursen

Fundamentala egenskaper hos Ω (behövs hela tiden ...)

Sats 1.7 Anta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sannolikhetsrum.

(där vi har: Ω = utfallsr. $\mathcal{F}$ = σ-alg. $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ sannolikhetsmått)

Då

(i) $P(\phi) = 0$

(ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \phi \Rightarrow$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\boxed{\text{(iv)} \quad 0 \le P(A) \le 1, \text{ för alla } A \in \mathcal{F}.}$

(v) $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

(vi) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Bevis (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} \phi = \phi \underset{(TN_3)}{\overset{\text{disjunkta!}}{\Rightarrow}}$

$P(\phi) = P(\phi) + P(\phi) + \dots \Rightarrow P(\phi) = 0$

(ii) $\Omega = A \cup A^c$ disjunkta $\Rightarrow$

$\underset{(TN_2)}{1 =} P(\Omega) \underset{(TN_3)}{=} P(A) + P(A^c)$ (för 2 mängder, $P(\phi) = 0$)

$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

(iii) specialfall av (TN_3): välj $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_j = \phi$, $j \ge 3 \Rightarrow$

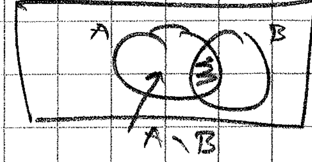
$$P(A \cup B) = P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \underset{(TN_3)}{\overset{\text{disj.}}{=}} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \underset{P(\phi)=0}{=} P(A) + P(B)$$

(iv) $A \in \mathcal{F} \overset{(TN_1)}{\Rightarrow} P(A) \ge 0$ (def.)

$P(A) \overset{(ii)}{=} 1 - \underbrace{P(A^c)}_{\ge 0} \le 1$.

(vi) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$

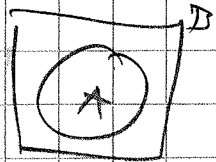
$$A = (A\setminus B) \cup (A\cap B)$$ disjunkt union



$$\Rightarrow P(A) \overset{\Sigma\,(iii)}{=} P(A\setminus B) + \underbrace{P(A\cap B)}_{0\le \quad \le 1}$$

$\Rightarrow$ lös
$$P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B)$$

(v) $A, B\in\mathcal{F}$, $A\subset B \Rightarrow$



$$0 \le P(B\setminus A) = P(B) - P(\underbrace{A\cap B}_{=A})$$

$$\Rightarrow P(A)\le P(B)$$ □.

<u>OBS</u> om $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}$, $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j \Rightarrow$

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) = P(A_1)+\dots+P(A_n)$$

viktigt specialfall av (N3) ovan (additivitet av $P(\cdot)$)

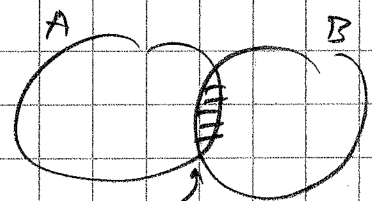
<u>Fråga</u> om $A, B\in\mathcal{F}$, $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow$ formel för $P(A\cup B)$?

dvs A, B godtyckliga i $\mathcal{F}$

<u>Summaformeln</u> om $A, B\in\mathcal{F}\Rightarrow$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

<u>Minnesregel</u>



$A\cap B$, (räknas "dubbelt" i HL).

<u>Bevis</u> $A\cup B = A\cup(B\setminus A)$ där $A\cap(B\setminus A)=\emptyset \Rightarrow$

$$P(A\cup B) = P(A\cup(B\setminus A)) \overset{\text{disjunkta, del (iii)}}{=} P(A) + \underbrace{P(B\setminus A)}_{=P(B)-P(B\cap A) \text{ enligt (vi)}}$$

$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$ □.

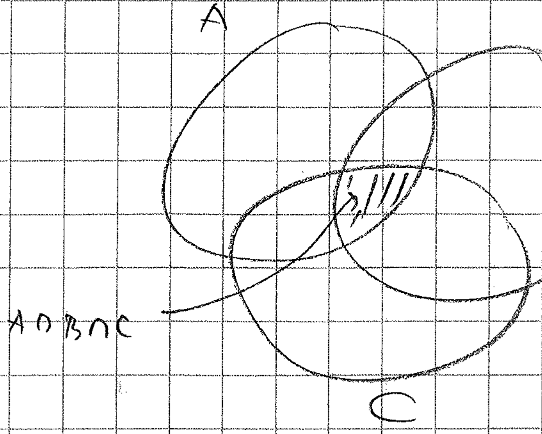
Vi behöver en <u>allmän</u> summaformel för sannolikheten $P(A_1\cup\dots\cup A_n)$, där $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}$ godtyckliga

först fallet $n = 3$

Om $A, B, C \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

tolkning: element i $A \cap B \cap C$ dras bort 1 gång för mycket



Bevis:

$$P(A \cup B \cup C) \overset{\text{summaformel}}{=} P(A \cup B) + P(C) - P(\overbrace{(A \cup B) \cap C}^{(A\cap C)\cup(B \cap C)})$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - \left[P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(\overbrace{A \cap C \cap B \cap C}^{A \cap B \cap C})\right]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \qquad \square$$

Med induktion visas den s.k. inklusions- och exklusionsprincipen:

Allmän summaformel om $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$$\begin{cases} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \dots \\ \quad + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots \\ \quad + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{cases}$$

allmänna termen i summan

Beviset: induktion på n. Induktionssteget $n \rightsquigarrow n+1$ som steget $n=2 \rightsquigarrow n=3$.
Detaljerna förbigås $\square$

övn?

15.9

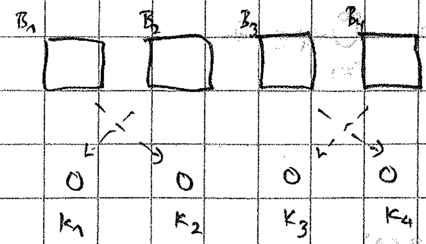
OBS. Ovan avser

$\sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j)$ summan över alla par (i,j) så att $1 \le i < j \le n$ osv.

Exempel: $n=3$ $\sum_{1 \le i < j \le 3} P(A_i \cap A_j) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)$

Exempel 1.8 4 adresserade brev sätts på måfå i 4 adresserade kuvert. Vilken är sannolikheten att åtminstone ett brev kommer rätt?

Lösn. 1



Utfallsrum

$\Omega = \{$alla permutationer av 4 element$\}$

permutation = bijektion $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ (senare)

$$n(\Omega) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Låt

A_j = j:s brev kommer rätt

$$P(\text{åtminstone 1 brev kommer rätt}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

$$\underset{n=4}{\overset{\text{summaf.}}{=}} \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \quad (*)$$

Vi analyserar HS:

A_1: $\overset{?}{o}$ $\underbrace{o \; o \; o}$ (permutera 3 element), 1 2 3 4 $\Rightarrow$ $P(A_1) = \dfrac{\overbrace{n(\text{permutation av 3 elem.})}^{3! = 6}}{24} = \dfrac{1}{4}$

samma argument $\Rightarrow$ $P(A_i) = \frac{1}{4}$ $\forall i = 1,\dots,4$ (symmetri!)

$A_1 \cap A_2$: $\overset{?}{o}$ $\overset{?}{o}$ $\underbrace{o \; o}$ (permutera 2 elem.), 1 2 $\Rightarrow$ $P(A_i \cap A_j) = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$ då $1 \le i < j \le 4$ (symmetri!)

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$: $\overset{?}{o}$ $\overset{?}{o}$ $\overset{?}{o}$ o, 1 2 3 4

$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{1}{24}$ (1 möjlighet endast)

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dfrac{1}{24}$ likaså

~~antalet termer i summorna?~~

antal termer i $\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le 4} \cdots = 6$

$(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$

antal termer i $\displaystyle\sum_{i<j<k} = 4$

$(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)$

sammanfatta $(*)$ $\Rightarrow$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{24 - 12 + 4 - 1}{24} = \frac{15}{24}$$

$\square$

(= "rencontre"-problem) "hattproblem"

Ovanstående enkelt exempel på "matching problem". Senare ges allmän formel för n element. (kan studera $p = p_n$ då $n \to \infty$)

1.4. Ändliga sannolikhetsrum

Sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ändligt om basmängden Ω är ändlig, dvs.

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \qquad \omega_i \neq \omega_j \quad i \neq j$$

något $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ naturligt välja $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ potensmängden till Ω som σ-algebra

Låt

$$p_i = P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, \dots, n$$

Talen p_i ($i = 1, \dots, n$) bestämmer sannolikheten P entydigt:

$A \subset \Omega$ delmängd $\Rightarrow$ $A = \{\omega_{i_1}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}$ disjunkt union $(\omega_{i_r} \neq \omega_{i_s},\ r \neq s)$

$$\overset{(TN_3)}{\Longrightarrow} \quad P(A) = \sum_{r=1}^{k} P(\{\omega_{i_r}\}) = \sum_{\omega_j \in A} p_j$$

Notera att

$$(*) \qquad p_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

$\boxed{\text{Obs också } p_i = 0 \text{ något } i \text{ kan förekomma}}$

Omvänt: $(*)$ ger en sannolikhetsfunktion på $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

Sats 1.9 Anta att talen $p_1, \dots, p_n$ uppfyller $(*)$. Då finns det en entydig sannolikhetsfunktion $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \underbrace{\mathbb{R}}_{=[0,1]}$ så att

$$(**) \quad \begin{cases} P(\{\omega_i\}) = p_i, & i = 1, \dots, n, \quad \text{och} \\ P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, & \forall A \subset \Omega \end{cases}$$

Bevis: förbigås (verifiera att $(**)$ satisfierar (TN_1), (TN_2), (TN_3)) $\square$.

Exempel Låt $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Den klassiska (symmetriska) sannolikheten (kapitel 1.1) erhålls om

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$(**) \Rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{\#(A)}{n} \quad \forall \text{ delmängder } A \subset \Omega$$

där $\#(A) = n(A) =$ antalet element i A.

15/11/2015