

Hemuppgifter

Beteckningen (1:2) avser uppgift 1:2 i kompendiet etc.

1. (3:1) Beräkna väntevärdena $\mathcal{E}(X^4)$ och $\mathcal{E}(\sin(2\pi X))$ då $X \sim \text{Gas}(0, 1)$.
2. Visa att variansen $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ då $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Tips:* visa först att $\text{Var}(X) = 1$ då $X \sim N(0, 1)$ är standardnormalfördelad genom att partiellt integrera

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$$

med uppdelningen $x^2 e^{-x^2/2} = x \cdot (x e^{-x^2/2})$.

3. (3:8) Anta att de stokastiska variablerna X , Y och Z är oberoende, samt att alla har samma väntevärde μ och samma varians σ^2 . Beräkna väntevärdet och variansen till följande stokastiska variabler:

(i) $2X + 3$, (ii) $X - Y$ (iii) $X - \frac{1}{2}Y$, (iv) $X + 2Y + 3Z$, (v) $X \cdot Y$.

Påminnelse: om X och Y är oberoende, så är också $g(X)$ och $h(Y)$ oberoende för alla kontinuerliga funktioner g och h på \mathbf{R} .

4. (3:15) Anta att X och Y är stokastiska variabler med (de ändliga) varianterna $\text{Var}(X)$ och $\text{Var}(Y)$. Visa att följande villkor är ekvivalenta:
 - (i) $\text{Cov}(X, Y) = 0$,
 - (ii) $\mathcal{E}(X \cdot Y) = \mathcal{E}(X) \cdot \mathcal{E}(Y)$,
 - (iii) $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

5. (3:11) Jämför den uppskattning Chebyshevs olikhet

$$P(\{|X - \mu| \geq k\sigma\}) \leq \frac{1}{k^2}$$

ger med de exakta sannolikheterna i fallen $k = 2$ och $k = 3$, då

(i) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, (ii) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6. Man avrundar de reella talen x_1, \dots, x_n till heltal y_1, \dots, y_n när man beräknar det aritmetiska medeltalet av talen. Anta att avrundningsfelen är stokastiska variabler som är oberoende av varandra samt $Tas(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -fördelade. Låt $X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)$ vara det aritmetiska medeltalet av felen. Uppskatta med hjälp av Chebyshevs olikhet hur stort n bör vara för att sannolikheten

$$P(\{|X - \frac{1}{2}| \geq 0.01\}) < 0.05.$$

Påminnelse: kursprovet ordnas måndag 9.3. kl 16-18 i Exactums auditorier (samtidigt kursprov i kursen Johdatus todennäköisyyslaskentaan). Extra provtillfälle ordnas vid behov ifall tidpunkten är olämplig. (För detta tag kontakt till e-mail adressen: hojtylli@cc.helsinki.fi).

En tvåsidig minneslapp av storlek A4 med valfritt innehåll får medtas till provtillfället, och provpappret innehåller en tabell över fördelningsfunktionen Φ till $X \sim N(0, 1)$. Kom ihåg att välja korrekt provuppgiftspapper, eftersom de finska och svenska kurserna har olika uppgifter.

Genomgång av diverse kursprovsuppgifter på sista föreläsningen torsdag 26.2.