INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Introduktion till sannolikhetskalkyl
Räkneövning 4
9.2.2015 (kl 10-12 i B321)

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U2 är frivilliga enklare uppgifter, som **inte** räknas med bland kryssen för extra poäng. Uppgifterna är avsedda att påminna om intressanta faktan för kursen. Fråga om dessa vid behov!

U1. Vid n upprepade (oberoende) kast av en tärning är sannolikheten $(\frac{5}{6})^n$ att *inte* få en etta. Hur stort bör n vara för att $(\frac{5}{6})^n < \frac{1}{2}$? [Svar: $n = 4$ räcker.]

U2. (geometriska serier; Analys II) Repetera varför formlerna

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^n = \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} \quad (p \neq 1, n \in \mathbf{N})$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty} ap^k = \frac{a}{1 - p} \quad (0 < p < 1, a \in \mathbf{R})$$

gäller.

Hemuppgifter

Beteckningen (1:2) avser uppgift 1:2 i kompendiet etc.

1. (2:3) Från en box som innehåller 6 röda och 9 vita bollar drar man 3 bollar på måfå utan återläggning. Den stokastiska variabeln X beskriver antalet röda bollar i dragningen. Bestäm värdemängden av X samt frekvenssannolikheterna $p_k = P(X = k)$, då k tillhör värdemängden.

2. (2:7) Härled frekvenssannolikheterna till följande stokastiska variabler X:
(i) X är antalet defekta enheter i en box som innehåller 48 produkter; vi antar att varje produkt har sannolikheten 0.05 att vara defekt oberoende av de övriga produkterna,
(ii) X är antalet bollar i ett givet fack (n bollar, k fack),
(iii) X är antalet gagnlösa kastomgångar vid upprepade kast av två tärningar, tills man erhåller ett par av sexor,

(iv) X är antalet färgblinda personer i ett slumpmässigt urval av 10 personer (med återläggning) från en population med 100 personer, varav 3 personer är färgblinda.

3. (2:6) En symmetriskt mynt singlas tills krona och klave har uppträtt åtminstone två gånger var. Låt X vara den kastomgång då spelet upphör. Härled frekvenssannoliheterna och fördelningsfunktionen till X och bestäm det minsta talet n för vilket

$$P(X \leq n) > 0.9.$$

4. (2:21) En tärning kastas 4 gånger. Låt X vara det största av de ögontal som erhålls. Beräkna väntevärdet $\mathcal{E}(X)$.

5. (2:28) Bestäm konstanten c så att funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bildar frekvensfunktionen till en kontinuerlig stokastisk variabel X, där $f(x) = cxe^{-x}$ om $x > 0$ och $f(x) = 0$ annars. Beräkna fördelningsfunktionen F av X och sannolikheten $P(0 < X < 1)$.

6. Bussar anländer till en hållplats kl 7.00, 7.15 och 7.30. Tidpunkten då en person kommer till hållplatsen är likformigt distribuerad mellan 7.00 och 7.30. Beräkna sannolikheten att personen bör vänta

(i) mindre än 5 minuter på en buss,

(ii) åtminstone 10 minuter på en buss.