INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Introduktion till sannolikhetskalkyl
Räkneövning 1
19.1.2015 (kl 10-12 i B321)

Uppvärmingsuppgifter

Uppvärmingsuppgifterna U1-U3 är frivilliga enklare uppgifter, som **inte** räknas med bland kryssen för extra poäng. Uppgifterna är avsedda att påminna om faktan som är bra att känna till på kursen. Fråga om dessa vid behov!

U1. Låt $A = \{1, \ldots, n\}$. Visualisera den kartesiska produkten

$$A^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\}$$

i planet och motivera varför antalet element $\#(A) = n^2$.

U2. Låt $\Omega = \{a, b, c\}$. Bilda potensmängden $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$. (Den har $2^3 = 8$ element.)

U3. Låt Ω vara en icke-tom basmängd. Förklara varför $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ och $\mathcal{P}(\Omega)$ är σ-algebror på Ω.

Hemuppgifter

Beteckningen (1:2) avser uppgift 1:2 i kompendiet etc.

1. (1:2) Ett tal väljs godtyckligt från talen $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Vilken är sannolikheten att talet är
   (i) delbart med 7,
   (ii) delbart med 7 men inte med 17,
   (iii) en kvadrat av ett heltal,
   (iv) en kub av ett heltal?

2. Två tärningar kastas. Beräkna sannolikheten av händelsen
   (i) summan av ögontalen är 8,
   (ii) båda ögontalen är ≤ 3,
   (iii) åtminstone ett av ögontalen är ≤ 3.

3. (1:9) Låt A och B vara händelser.

(i) Uttryck följande händelser med hjälp av mängdoperationer. Av händelserna A och B gäller att (a) båda inträffar, (b) ingendera inträffar, (c) åtminstone en inträffar, (d) exakt en inträffar.

(ii) Beräkna motsvarande sannolikheter i fallen (a)-(d) med hjälp av $P(A)$, $P(B)$ och $P(A \cap B)$.

4. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum. Visa att *Booles olikheter* gäller:
(i) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ för alla $A, B \in \mathcal{F}$,
(ii) $P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c)$ för alla $A, B \in \mathcal{F}$.

5. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum. Härled inklusions- och exklusionsprincipen

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

för tre godtyckliga mängder $A, B, C \in \mathcal{F}$ från motsvarande summaformel för $P(A_1 \cup A_2)$.

6. (1.11) I en stad ger man ut tre tidningar (A, B, C). I en undersökning om läsvanorna av fullvuxna personer observerades att dessa tidningar lästes regelbundet enligt följande:
A: 20% B: 16% C: 14%
A och B: 8% A och C: 5% B och C: 4%
A och B och C: 2%
Man betraktar en godtycklig fullvuxen person. Vilken är sannolikheten att personen
(i) inte läser någon av tidningarna regelbundet,
(ii) läser regelbundet A, men varken B eller C,
(iii) läser regelbundet exakt en av dessa tidningar?

Extrapoäng för lösta räkneövningsuppgifter: för *varje* räkneövning 2–3 lösta uppgifter = +1/2 p., 4–6 lösta uppgifter = +1 p. Extrapoängen (max + 6 p) adderas till poängtalet i kursprovet (4 uppgifter och 2 timmar tid).