ISK kp. 9.3.2015 : modellsvar

(1.) En tärning kastas 5 ggr. Låt $A = \{\text{åtminstone en etta}\}$, $B = \{\text{åtminstone en tvåa}\}$.

Bestäm $P(A \cap B)$

Lösn: observera komplementsl lätta beräkna

$A^c = \{\text{ingen etta på 5 kast}\} \Rightarrow P(A^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$ (5 möjligheter missa, 5 kast)

$B^c = \{\text{ingen tvåa på 5 kast}\} \Rightarrow P(B^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

$A^c \cap B^c = \{\text{ingen etta eller tvåa på 5 kast}\} \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ $\left(\frac{4 \text{ möjligheter,}}{5 \text{ ober. kast}}\right)$

Vi skriver $P(A \cap B)$ med ovanstående sl:

(*)
$$P(A \cap B) \overset{\text{komplement}}{=} 1 - P\left((A \cap B)^c\right) \underset{\text{Morgan}}{\overset{\text{de}}{=}} 1 - P(A^c \cup B^c) \underset{\text{formel}}{\overset{\text{summa}}{=}}$$
$$= 1 - \left(P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)\right) = 1 + P(A^c \cap B^c) - P(A^c) - P(B^c)$$
$$\overset{\text{ovan}}{=} 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Kommentar: (*) kan härledas på flera alternativa sätt... Varning: A och B inte oberoende händelser!

(2.) Box 1: 2 vita, 2 svarta (bollar)
Box 2: 1 vit, 3 röda
Box 3: 2 röda, 3 svarta

Boxen väljs först på måfå, sedan dras två bollar utan återläggning från boxen.

Låt

B_j = box j väljs i första skedet, $j = 1, 2, 3$ $\overset{\text{"måfå"}}{\Longrightarrow}$ $P(B_j) = \frac{1}{3}$ $\forall j = 1, 2, 3$.

A = 2 röda bollar dras.

(i) totala sl lagen $\Rightarrow$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\underset{\text{inga röda i Bsx 1}}{0} + \underset{\text{1. bollen röd}}{\frac{3}{4}} \cdot \underset{\text{2. boll röd}}{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5} \cdot \underset{\text{likadant}}{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{5}$$

Obs kan inte fås med symm sl.!

alternativt: i box 2 $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ symm. möjligheter få 2 röda, (= sl)

i box 3 $\dfrac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$ sl få 2 röda

(ii) betingad sl att välja 2. boxen om erhåller 2 röda bollar dvs

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)\, P(B_2)}{P(A)} \overset{\text{ovan}}{=} \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

Bayes formel

[på samma sätt: betingad sl välja 3. boxen om erhåller 2 röda bollar är

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3)\, P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{60}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$]

Varning ① betingad sl $P(B_2 \mid A) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)}$ svår bestämma direkt, alltså Bayes!

② A och B_j inte oberoende!!

③ Anta s.v. $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$ på Ω, samt $X \perp\!\!\!\perp Y$ oberoende.

Def. $Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$.

(i) fördelningsfunktionen $F_Z(t) = P(\{\omega : Z(\omega) \le t\})$ till Z?

observera: $Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\} \le t \iff X(\omega) \le t$ och $Y(\omega) \le t$

alltså

$$F_Z(t) = P(\{\omega : X(\omega) \le t\} \cap \{\omega : Y(\omega) \le t\})$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(\{\omega : X(\omega) \le t\}) \cdot P(\{\omega : Y(\omega) \le t\})$$

$$= \Phi(t) \cdot \Phi(t) = \Phi(t)^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

där $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\, dx$ eftersom $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$.

(Φ = fördelningsfkt:n till standardnormalfördelning)

(ii) Bestäm sl $P(0 < Z < 1)$.

Lösn teorin

$$P(0 < Z < 1) = P(\{\omega : Z(\omega) < 1\} \setminus \{\omega : Z(\omega) \le 0\})$$

$$= P(Z < 1) - P(Z \le 0) \overset{\text{def}}{=} F_Z(1) - F_Z(0)$$

$$= \Phi(1)^2 - \underbrace{\Phi(0)}_{\frac{1}{2}}{}^2 \overset{\text{tabell}}{\approx} (0.841345)^2 - \frac{1}{4}$$

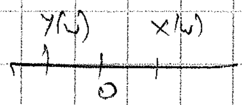
$$\approx 0.4578$$

Kommentar

$Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\} > 0 \iff$

$X(\omega) > 0$ eller $Y(\omega) > 0$, dvs

$\{0 < Z\} = \{0 < X\} \cup \{0 < Y\}$, svårare räkna med!



ISF kp. 9.3. 2015

(4.) symmetriskt mynt singlas 60 ggr. Låt $X = \#$ kronor (i 60 singlingar)

(i) Bestäm så $P(20 \leq X \leq 40)$, dvs så får 20 till 40 st kronor

Lösn vet $X \sim Bin(60, \frac{1}{2})$ dvs. $P(\{X = k\}) = \binom{60}{k} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{60-k}}$

Då är $= \binom{60}{k} \cdot \frac{1}{2^{60}} \quad \forall k$

$$P(20 \leq X \leq 40) = P\left(\bigcup_{k=20}^{40} \{X = k\}\right) \underset{\text{händelser}}{\overset{\text{disjunkta}}{=}} \sum_{k=20}^{40} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=20}^{40} \binom{60}{k} \cdot \frac{1}{2^{60}} = \frac{1}{2^{60}} \sum_{k=20}^{40} \binom{60}{k}$$

(ii) normalapproximation av $P(20 \leq X \leq 40)$?

väntevärdet $E(X) = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30 = \mu$

variansen $Var(X) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 15 = \sigma^2$

normalapproximation: $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, så att

$$P(20 \leq X \leq 40) \underset{\text{kont. modif.}}{\overset{(*)}{=}} P(19{,}5 \leq X \leq 40{,}5) = P(\underbrace{19{,}5 - 30}_{-10{,}5} \leq X - 30 \leq \underbrace{40{,}5 - 30}_{10{,}5})$$

$$= P\left(\frac{-10{,}5}{\sqrt{15}} \leq \frac{X - 30}{\sqrt{15}} \leq \frac{10{,}5}{\sqrt{15}}\right) \overset{NA}{\approx} \Phi\left(\frac{10{,}5}{\sqrt{15}}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{10{,}5}{\sqrt{15}}\right)}_{= 1 - \Phi\left(\frac{10{,}5}{\sqrt{15}}\right)}$$

(symm. av Φ)

$$= 2\Phi\left(\frac{10{,}5}{\sqrt{15}}\right) - 1 \quad \left(\overset{\text{tabell}}{\approx} 0{,}992\ldots\right)$$

där $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ fördelningsfktn av $N(0,1)$ s.v.

(*) Kommentar kontinuitetsmodifikationen en option (ger aning noggrannare resultat)

utan modifikation erhåller $P(20 \leq X \leq 40) \approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{15}}\right) - 1$.