INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK
Sannolikhetslära I
1. kursprovet
15.11. 1999

1. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum, där händelserna $A, B \in \mathcal{F}$ satisfierar $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ och $P(A \cup B) = \frac{3}{10}$.
(i) Beräkna $P(A \cap B)$.
(ii) Är händelserna A och B oberoende?
(iii) Beräkna de betingade sannolikheterna $P(A|B)$ och $P(B|A)$.

2. 10 lådor är givna. Tre lådor innehåller 3 vita bollar och 1 svart boll, tre lådor innehåller 2 vita bollar och 4 blåa bollar samt fyra lådor innehåller 5 vita bollar och 5 gula bollar. En låda väljs först på måfå, från vilken man drar två bollar på måfå utan återläggning. Beräkna sannolikheten att båda bollarna är vita.

3. Anta att X_1 och X_2 är oberoende stokastiska variabler $\Omega \to \mathbf{N}$, så att $X_1, X_2 \sim Poisson(\lambda)$. Definiera $Z = \max\{X_1, X_2\}$. Beräkna sannolikheten $P(Z \geq 2)$.

4. Beräkna fördelningsfunktionen och frekvensfunktionen till arean av en cirkelskiva med radien R, där R är en $Tas(0, 1)$-fördelad stokastisk variabel. [Här betecknar $Tas(0, 1)$ den likformiga fördelningen på intervallet $(0, 1)$.]

Påminnelse: $X \sim Poisson(\lambda)$ (där $\lambda > 0$) avser att dess frekvenssannolikheter satisfierar $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ för $k = 0, 1, \ldots$.

Matematiska institutionen
Sannolikhetslära I
2. mellanförhöret 13.12. 1999

1. Anta att $\{X_1, X_2, X_3\}$ är oberoende stokastiska variabler $\Omega \to \mathbf{R}$ med $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,4)$ och $X_3 \sim N(0,9)$, samt $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$. Beräkna
   (i) väntevärdet $E(Y)$,
   (ii) korrelationskoefficienten $\mathrm{Corr}(X_1, Y)$.

2. Anta att $X : \Omega \to \mathbf{N}$ är en stokastisk variabel med slgf $G(t) = \frac{1}{5-2t}$ då $|t| < \frac{5}{2}$. Beräkna
   (i) väntevärdet $E(X)$,
   (ii) variansen $D^2(X)$,
   (iii) $P(\{\omega : X(\omega) \leq 1\})$

3. Ett symmetriskt mynt kastas 100 gånger. Sök med hjälp av normalapproximation ett närmevärde för sannolikheten att erhålla mellan 60 till 65 st kronor.

4. Låt (X, Y) vara en stokastisk vektor med frekvensfunktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, där

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

   (i) Bestäm marginalfrekvensfunktionerna f_X och f_Y till X och Y.
   (ii) Är X och Y oberoende stokastiska variabler (motivera !) ?
   (iii) Beräkna den betingade frekvensfunktionen $f_Y(y|X = x)$ (när den existerar).

Tabell över f.f. till $N(0,1)$-fördelningen på baksidan.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Todennäköisyyslaskenta I
2. välikoe 13.12. 1999

1. Olkoot $\{X_1, X_2, X_3\}$ riippumattomia satunnaismuuttujia $\Omega \to \mathbf{R}$, joille $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,4)$ ja $X_3 \sim N(0,9)$, sekä $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$. Laske
   (i) odotusarvo $E(Y)$,
   (ii) korrelaatiokerroin $\mathrm{Corr}(X_1, Y)$.

2. Olkoon $X : \Omega \to \mathbf{N}$ satunnaismuuttuja, jonka tngf on $G(t) = \frac{1}{5-2t}$ kun $|t| < \frac{5}{2}$. Laske
   (i) odotusarvo $E(X)$,
   (ii) varianssi $D^2(X)$,
   (iii) $P(\{\omega : X(\omega) \leq 1\})$

3. Symmetristä kolikkoa heitetään 100 kertaa. Etsi normaaliapproksimaation avulla likiarvo todennäköisyydelle saada $60 - 65$ kpl kruunua.

4. Olkoon (X, Y) satunnaisvektori jonka tiheysfunktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   (i) Määrää X:n ja Y:n reunatiheysfunktiot f_X och f_Y.
   (ii) Ovatko X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia (perustelu !) ?
   (iii) Laske ehdollinen tiheysfunktio $f_Y(y|X = x)$ (kun se on olemassa).

Kääntöpuolella taulukko $N(0,1)$-jakauman kf:lle.

Matematiska institutionen
Sannolikhetslära I
Slutförhör 14.12. 1999

1. Ett symmetriskt mynt kastas 6 gånger. Beräkna sannolikheten att erhålla 5 eller 6 st klave.

2. Livstiden hos batteriet till en elektronisk räkneapparat är en stokastisk variabel X som är $Exp(\lambda)$-fördelad med parametern $\lambda = \frac{1}{1000}$ (enheten timme). 10 personer deltar i ett 4 timmars slutförhör, där deltagarna använder sina räkneapparater hela tiden. Beräkna sannolikheten att batteriet till varje räkneapparat fungerar under hela slutförhöret.

3. Låt $X \sim Tas(0,1)$ vara en stokastisk variabel. Beräkna väntevärdet $E(e^X)$ och variansen $D^2(e^X)$.

4. Händelsen A har sannolikheten $\frac{1}{2}$ i ett försök. Använd normalapproximation till att uppskatta sannolikheten för att händelsen A uppträder mellan 400 till 600 gånger vid 1000 oberoende upprepningar av försöket. [Svaret får innehålla värden för fördelningsfunktionen Φ till $N(0,1)$-fördelningen.]

5. Anta att (X,Y) är en stokastisk vektor med frekvensfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

(i) Beräkna marginalfrekvensfunktionerna f_X och f_Y.
(ii) Sök de betingade frekvensfunktionerna $f_Y(y|X=x)$ och $f_X(x|Y=y)$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Todennäköisyyslaskenta I
Loppukoe 14.12. 1999

1. Symmetristä kolikkoa heitetään 6 kertaa. Laske todennäköisyys, että saadaan 5 tai 6 klaavaa.

2. Laskimen pariston toiminta-aika on stokastinen muuttuja X joka on $Exp(\lambda)$-jakautunut parametrina $\lambda = \frac{1}{1000}$ (yksikkönä tunti). 10 henkilöä osallistuvat 4 tunnin loppukokeeseen, jossa osallistujat käyttävät laskinta koko ajan. Mikä on todennäköisyys että jokaisen laskimen paristo toimii koko loppukokeen aikana ?

3. Olkoon $X \sim Tas(0,1)$ stokastinen muuttuja. Laske odotusarvo $E(e^X)$ ja varianssi $D^2(e^X)$.

4. Tapahtuman A todennäköisyys eräässä satunnaiskokeessa on $\frac{1}{2}$. Arvioi normaaliapproksimaation avulla todennäköisyys, että tapahtuma A esiintyy 400 - 600 kertaa kun koetta toistetaan riippumattomasti 1000 kertaa. [Vastauksesi saa sisältää $N(0,1)$-jakauman kertymäfunktion Φ arvoja.]

5. Olkoon (X,Y) satunnaisvektori jonka tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

(i) Laske reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y.
(ii) Etsi ehdolliset tiheysfunktiot $f_Y(y|X=x)$ ja $f_X(x|Y=y)$.

Matematiska institutionen
Sannolikhetslära I
Slutförhör 18.1. 2000

1. (i) Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum, $A, B \in \mathcal{F}$ händelser med $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$. Visa att $P(A|B) \geq \frac{1}{2}$.
(ii) Siffrorna i talet 77539 permuteras godtyckligt. Vilken är sannolikheten att erhålla ett tal av formen 77... ?

2. Låt $X \sim Tas(0,1)$ vara en stokastisk variabel. Sök fördelnings- och frekvensfunktionen till den samansatta stokastiska variabeln e^X.

3. Anta att $X : \Omega \to \mathbf{N}$ är en diskret stokastisk variabel med den sannolikhetsgenererande funktionen $G(t) = c(1 + t + t^3)^{10}$ för en lämplig konstant $c > 0$. Bestäm c, och beräkna väntevärdet $E(X)$.

4. En tärning kastas 36 gånger, och A är händelsen att erhålla mellan 5 till 7 st ettor. Vilken är den exakta sannolikheten till A ? Uppskatta denna sannolikhet med hjälp av kontinuitetsmodifikation och normalapproximation. [Svaret får innehålla fördelningsfunktionen Φ till $N(0,1)$-fördelningen.]

5. Anta att (X, Y) är en stokastisk vektor med frekvensfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

(i) Sök marginalfrekvensfunktionerna f_X och f_Y. Är X och Y oberoende ?
(ii) Sök den betingade frekvensfunktionen $f_Y(y|X = x)$.

Todennäköisyyslaskenta I
Loppukoe 18.1. 2000

1. (i) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus, $A, B \in \mathcal{F}$ tapahtumia joille $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$. Näytä, että $P(A|B) \geq \frac{1}{2}$.
(ii) Luvun 77539 numerot permutoidaan umpimähkään. Millä todennäköisyydellä saadaan luku joka on muotoa 77... ?

2. Olkoon $X \sim Tas(0,1)$ satunnaismuuttuja. Etsi yhdistetyn satunnaismuuttujan e^X kertymä- ja tiheysfunktio.

3. Olkoon $X : \Omega \to \mathbf{N}$ satunnaismuuttuja, jolla on todennäköisyysgeneroiva funktio $G(t) = c(1 + t + t^3)^{10}$ sopivalla vakion $c > 0$ arvolla. Määrää c ja laske odotusarvo $E(X)$.

4. Noppaa heitetään 36 kertaa, ja A on tapahtuma että saadaan $5 - 7$ ykköstä. Mikä on tapahtuman A tarkka todennäköisyys ? Arvioi tätä todennäköisyyttä jatkuvuuskorjauksen ja normaaliapproksimaation avulla. [Vastauksesi saa sisältää $N(0,1)$-jakauman kertymäfunktion Φ arvoja.]

5. Olkoon (X, Y) satunnaisvektori jonka tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

(i) Etsi reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y. Ovatko X ja Y riippumattomia ?
(ii) Etsi ehdollinen tiheysfunktio $f_Y(y|X = x)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kurssikoe 12.3.2012

1. Kukkarossa on 50 kolikkoa, joista yhdessä on molemmilla puolilla kruuna; kahdessa on molemmilla puolilla klaava; muut 47 kolikkoa ovat tavallisia (toisella puolella kruuna ja toisella klaava). Kukkarosta valitaan umpimähkään yksi kolikko.
   (a) Valittua kolikkoa heitetään yhden kerran. Millä todennäköisyydellä saadaan kruuna?
   (b) Valittua kolikkoa heitetään kuusi kertaa. Jokaisella heittokerralla saadaan kruuna. Mikä on todennäköisyys, että valituksi tulleessa kolikossa on molemmilla puolilla kruuna?

2. Eräällä satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f,

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{jos } 0 < x < 10, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

   (a) Määritä vakio c.
   (b) Laske X:n odotusarvo ja varianssi.
   (c) Laske $P(X^2 < 16)$.

3. Liftari tietää kokemuksensa perusteella keskimäärin 60 auton ajavan pysähtymättä ohi ennen kuin yksi pysähtyy. Kullakin kuljettajalla on keskenään sama todennäköisyys pysähtyä, ja he tekevät pysähtymispäätöksensä toisistaan riippumatta. Mikä on todennäköisyys, että jo ensimmäinen paikalle saapuva auto pysähtyy? Perustele ratkaisusi (esim. käyttämäsi jakauma) huolellisesti.

4. Satunnaismuuttujat X_1, X_2 ja X_3 ovat riippumattomia ja $N(0, 1)$-jakautuneita. Merkitään

$$\overline{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3).$$

   (a) Mikä on $\overline{X}$:n jakauma?
   (b) Mikä on satunnaismuuttujan $\overline{X} - X_1$ jakauma?
   (c) Laske $P(-1 < \overline{X} < 1)$.

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kurssikoe 14.3.2011

1. Perhe hankkii kotikäyttöön 10 hehku- ja 5 energiansäästölamppua. Hehkulamput kestävät vähintään kolme kuukautta todennäköisyydellä 0,6 ja energiansäästölamput vähintään kolme kuukautta todennäköisyydellä 0,9. Lamput menevät vahingossa sekaisin, eikä niitä voi erottaa toisistaan ulkonäön perusteella. Vaihtaessaan ehjän lampun rikki menneen tilalle perheenäiti valitsee umpimähkään yhden 15 uudesta lampusta.
   (a) Laske todennäköisyys, että vaihdettu lamppu kestää vähintään kolme kuukautta.
   (b) Kolmen kuukauden kuluttua perhe havaitsee, että äidin vaihtama lamppu on edelleen ehjä. Mikä on todennäköisyys, että se on hehkulamppu?

2. Matti ostaa käytetyn auton, jolla on ajettu 150 000 kilometriä. Mikä on todennäköisyys, että Matti ajaa autolla vielä vähintään 100 000 kilometriä lisää, kun uuden (0 km ajetun) auton käyttöikää (ennen sen romuttamista ajettua matkaa) kuvaava satunnaismuuttuja on
   (a) eksponenttijakautunut odotusarvona 250 000 kilometriä,
   (b) jakautunut tasaisesti välille (100 000 km, 400 000 km)?

3. Heitetään kolikkoa 10 000 kertaa. Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen todennäköisyys, että saatujen klaavojen lukumäärä on vähintään 5100.

4. Olkoon X satunnaismuuttuja, jolle $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$. Jos $EX = 3D^2X$, niin määritä $P(X = 0)$.

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990862	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,0	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kurssikoe 15.3.2010

1. Viesti koostuu kahdenlaisista peräkkäisistä merkeistä, nollista ja ykkösistä. Niitä esiintyy viestissä suhteessa 3:4 (nollat:ykköset). Viestiyhteys on erittäin huono, jonka vuoksi mikä tahansa nolla muuttuu ykköseksi todennäköisyydellä $1/4$ ja vastaavasti ykkönen nollaksi todennäköisyydellä $1/3$. Mikä on todennäköisyys, että vastaanotetun viestin nolla on lähetetty nollana, ei ykkösenä?

2. Kolme kaverusta käy kahvilla. Laskun maksaja arvotaan kolikkoja heittämällä. Jokainen heittää yhden kolikon, *yksin jäänyt* (kruunan/klaavan saanut silloin kun molemmat muut saavat klaavan/kruunan) maksaa laskun. Jos kaikki saavat saman, niin heitetään uusi kierros. Näin jatketaan, kunnes maksaja on selvillä. Asetetaan diskreetti satunnaismuuttuja

$$X = \text{"turhien kierrosten lukumäärä ennen kuin maksaja on selvillä"}.$$

a) Mikä on satunnaismuuttujan X jakauma?

Laske todennäköisyys, että kolikonheittoja tarvitaan

b) vähintään kolme kierrosta,

c) vähintään kuusi kierrosta, kun kolme kierrosta on jo heitetty, eikä laskun maksaja ole vielä selvillä.

3. Moottoritiellä kahden samaan suuntaan kulkevan peräkkäisen auton välimatka on eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on 100 metriä. Oletetaan, että autojen välimatkat ovat toisistaan riippumattomia. Laske normaaliapproksimaatiolla todennäköisyys, että kahden kilometrin matkalla yhteen suuntaan kulkee korkeintaan 17 autoa. *Muistutus*: Jos $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, niin $EX = 1/\lambda$ ja $D^2X = 1/\lambda^2$.

4. Tutkitaan 60 henkilön ryhmää, jossa tupakoivien ja tupakoimattomien sekä keuhkosyöpää sairastavien ja sairastamattomien lukumäärät on esitetty seuraavassa taulukossa:

	Ei tupakoi	Tupakoi	Yhteensä
Ei keuhkosyöpää	40	10	50
On keuhkosyöpä	7	3	10
Yhtensä	47	13	60

Valitaan ryhmästä satunnaisesti yksi henkilö. Tutkitaan kahta satunnaismuuttujaa S ja T, joilla

$$S = \begin{cases} 1, & \text{jos valitulla henkilöllä on keuhkosyöpä,} \\ 0, & \text{jos valitulla henkilöllä ei ole keuhkosyöpää,} \end{cases}$$

ja

$$T = \begin{cases} 1, & \text{jos valittu henkilö tupakoi,} \\ 0, & \text{jos valittu henkilö ei tupakoi.} \end{cases}$$

a) Määritä S:n ja T:n yhteisjakauma ja reunajakaumat. (Tee taulukko!)

b) Tutki, ovatko satunnaismuuttujat S ja T riippumattomia.

c) Laske $\text{Corr}(S, T)$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kurssikoe 2.3.2009

1. Kukkarossa on 65 kolikkoa, joista yhdessä on molemmilla puolilla kruuna. Muut kolikot ovat tavallisia, joissa toisella puolella on kruuna ja toisella klaava. Kukkarosta valitaan umpimähkään yksi kolikko ja aletaan heittää sitä. Jos kuudessa ensimmäisessä heitossa jokaisen heiton tulos on ollut kruuna, niin mikä on todennäköisyys, että valituksi tullut kolikko on se, jossa on kruuna molemmilla puolilla?

2. Oletetaan, että auton korjaamiseen kuluva aika T on eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja (yksikkönä tunti). Pitkän kokemuksen perusteella autokorjaamolla tiedetään, että auton korjaamiseen kuluu aikaa keskimäärin 2 tuntia. Voit siis olettaa, että $ET = 2$. Eräänä aamuna herra K tuo autonsa korjattavaksi ja auton korjaaminen aloitetaan klo 8.
   (a) Laske todennäköisyys, että kun herra K soittaa autokorjaamoon klo 12, niin auto on jo korjattu ja sen voi noutaa.
   (b) Soittaessaan autokorjaamoon klo 12 herra K saa kuulla, että autoa ei ole vielä saatu korjatuksi. Laske tällä ehdolla todennäköisyys, että auton korjaaminen on edelleen kesken työpäivän päättyessä klo 16.

3. Noppaa heitetään 420 kertaa. Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen likiarvo todennäköisyydelle, että nopan pistelukujen summa on 1400 ja 1550 välillä.

4. (a) Määritä vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \begin{cases} c|x|, & -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$
   määrittelee tiheysfunktion.
   (b) Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on f. Määritä X:n kertymäfunktio F.
   (c) Laske $P(X^2 > 2)$.