ISK: Kursprovsgenomgång 26.2.2015

1/2012 En box innehåller 50 mynt, där ett mynt har kronor på båda sidorna, 2 mynt har klavar på båda sidorna och övriga 47 mynt är normala (dvs krona och klave på olika sidor). Man väljer på måfå ett mynt från boxen.

(1) Det valda myntet singlas en gång. Vilken är sl att få en krona?

(2) Det valda myntet singlas 6 gånger. Varje gång erhålls en krona. Vilken är sl att man har valt det mynt som har kronor på båda sidorna?

Lösn

A_1 = väljer mynt med 2 kronor
A_2 = väljer mynt med 2 klavar
A_3 = väljer normalt mynt

} i första valet

$$\Longrightarrow \quad P(A_1) = \frac{1}{50}, \quad P(A_2) = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}, \quad P(A_3) = \frac{47}{50}$$

(1) Låt B = singling ger krona

totala sl-lagen ($\{A_1, A_2, A_3\}$ partition) $\Rightarrow$

$$P(B) = P(A_1)\underbrace{P(B|A_1)}_{\substack{=1 \\ \text{(säker händelse)}}} + P(A_2)\underbrace{P(B|A_2)}_{\substack{=0 \\ \text{(omöjlig!)}}} + P(A_3)\underbrace{P(B|A_3)}_{=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{50}\cdot 1 + \frac{2}{50}\cdot 0 + \frac{47}{50}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{50} + \frac{47}{100} = \frac{49}{100}$$

(2) Låt C = 6 kronor vid 6 singlingar. Då är

$$P(C|A_1) = 1, \quad P(C|A_2) = 0, \quad P(C|A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}$$

Singlingar oberoende, $P(\text{krona}) = \frac{1}{2}$

Bayes formel $\Rightarrow$

$$P(A_1|C) = \frac{P(C|A_1)P(A_1)}{P(C)} \overset{\text{total sl}}{=} \frac{P(C|A_1)P(A_1)}{P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) + P(C|A_3)P(A_3)}$$

$2^6 = 64$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{50}}{1\cdot\frac{1}{50} + 0\cdot\frac{2}{50} + \frac{1}{2^6}\cdot\frac{47}{50}} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{50} + \frac{47}{50\cdot 64}} = \frac{1}{1 + \frac{47}{64}} = \frac{64}{111}$$

□.

(2/2012) En s.v. X är kontinuerligt fördelad med frekvensfkt.n

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{om } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(a) Bestäm konstant c

(b) Bestäm väntevärdet $E(X)$ och variansen $Var(X)$

(c) Beräkna sl $P(X^2 < 16)$.

Lösn (a) f frekvensfktn $\Longleftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{10} cx\,dx = c \Big/_0^{10} \frac{x^2}{2} \overset{\text{villkor}}{=} 1$

dvs $c \cdot \frac{100}{2} = 1 \Longleftrightarrow c = \frac{1}{50}$

(b) väntevärdet

$$E(X) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{50}\int_0^{10} x \cdot x\,dx = \frac{1}{50}\int_0^{10} x^2 dx = \frac{1}{50} \Big/_0^{10} \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{1}{50}\left(\frac{1000}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ där

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{50}\int_0^{10} x^3 dx = \frac{1}{50}\Big/_0^{10}\frac{x^4}{4} = \frac{1}{50}\cdot\frac{10.000}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

$g(t) = t^2$ ger $X^2 = g(X)$

$$\Rightarrow Var(X) = 50 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{9}{9}50 - \frac{400}{9} = \frac{450-400}{9} = \frac{50}{9}$$

(c) $P(X^2 < 16) = P(\{\omega : X(\omega)^2 < 16\}) \overset{\text{ta } \sqrt{\cdot}}{=} P(\{\omega : -4 < X(\omega) < 4\})$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \frac{1}{50}\int_0^4 x\,dx = \frac{1}{50}\Big/_0^4 \frac{x^2}{2} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} \quad \square.$$

kontin. f-deln.

(2/2011) Personen P köper en begagnad bil, som har blivit körd 150.000 km. Vilken är sl att P kör åtminstone 100.000 km till med bilen, då användningstiden (= före bilen får ett fel) av en ny bil (= körd 0 km) är en s.v. X som är

(a) exponentfördelad med väntevärdet 250.000 km

(b) likformigt fördelad på intervallet (100.000 km, 400.000 km)

Lösn Låt X = bilens användningstid med enhet 100.000 km

(a) påminn $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ dvs frekvensfkt

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ väntevärdet $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

antagandet $E(X) = 2.5 = \frac{1}{1/2.5}$ $\Rightarrow$ parametern $\lambda = \frac{1}{2.5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

och $X \sim Exp\left(\frac{10}{25}\right)$, enhet 100.000 km

$$\Rightarrow P(X \geq 2.5 \mid X \geq 1.5) = P(\underbrace{X \geq 1}_{=\{X<1\}^c}) = 1 - P(X < 1)$$

$X \sim Exp(\lambda)$ "saknar" "minne"

$$= 1 - F_X(1) \underset{X \sim Exp(\frac{10}{25})}{=} 1 - \left(1 - e^{-\frac{10}{25}\cdot 1}\right) = e^{-\frac{2}{5}} \quad (\approx 0.670)$$

(påminn: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow$ betingad sl

$$P(X > t+h \mid X > t) = P(X > h) \quad \text{för alla } t > 0,\ h > 0.$$

(b) nu är $X \sim Jas(1, 4)$ (enhet 100.000 km), som har fr.-fktn

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 < x < 4 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

och

fördelningsfunktion
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Då är betingade sl

$\{X \geq 2.5\} \subset \{X \geq 1.5\}$

$$P(X \geq 2.5 \mid X \geq 1.5) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(\{X \geq 2.5\} \cap \{X \geq 1.5\})}{P(X \geq 1.5)} =$$

$$= \frac{P(X \geq 2.5)}{P(X \geq 1.5)} \underset{\text{komplement}}{=} \frac{1 - P(X < 2.5)}{1 - P(X < 1.5)} = \frac{1 - F(\frac{5}{2})}{1 - F(\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}(\frac{5}{2} - 1)}{1 - \frac{1}{3}(\frac{3}{2} - 1)} = \frac{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5} \quad (= 0.6) \quad \square$$

4/2011 Låt X vara s.v. för vilken

$$P(X=0) = 1 - P(X=1).$$

Om $\mathbb{E}(X) = 3\,\mathrm{Var}(X)$, bestäm $P(X=0)$.

<u>Lösn</u>

$$\underbrace{P(X=0)+P(X=1)}_{P(\{X=0\}\cup\{X=1\})} = 1 \overset{\text{komplement}}{\Rightarrow} P(\{w : X(w) \neq 0,1\}) = 0$$

$\Rightarrow$ X diskret s.v. (väsentligen)

Def $p = P(X=0)$, så att $P(X=1) = 1-p$.

väntevärdet $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot \underbrace{P(X=1)}_{1-p} = 1-p$

variansen : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ där

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) = 1-p$$ också, så att

$$\mathrm{Var}(X) = (1-p) - (1-p)^2 = (1-p)\underbrace{[1-(1-p)]}_{=p} = p(1-p)$$

villkoret $\mathbb{E}(X) = 3\,\mathrm{Var}(X)$ ger villkoret

$$1-p = 3p(1-p)$$

gäller trivialt om $p=1$ (dvs $P(X=0)=1$)

om $0<p<1$, så $\underbrace{1-p}_{1-p>0} = 3p(1-p) \Leftrightarrow 1 = 3p \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$

<u>alltså</u> $P(X=0)=1$ eller $P(X=0)=\frac{1}{3}$ $\square$.

1/1999 Anta $\{X_1, X_2, X_3\}$ oberoende s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ så att

$X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,4)$ och $X_3 \sim N(0,9)$ samt

$$Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3).$$

Beräkna

(a) väntevärdet $\mathbb{E}(Y)$

(b) $$\frac{\mathrm{Cov}(X_1, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

<u>Lösn</u> (a) linearitet $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}(X_2)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}(X_3)}_{=0}\right) = 0$

(b)

$\mathbb{E}(X_1) = 0 = \mathbb{E}(Y)$

$$\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \mathbb{E}\left(X_1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right)\right).$$

$$\overset{\text{lin}}{=} \frac{1}{3}\,\mathbb{E}\left(X_1^2 + X_1X_2 + X_1X_3\right) \overset{\text{lin}}{=} \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\mathbb{E}(X_1^2)}_{=1} + \mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_1X_3)\Big).$$

$$\overset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2,\ X_1 \perp\!\!\!\perp X_3}{=} \frac{1}{3}\Big(1 + \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{=0}\mathbb{E}(X_2) + \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{=0}\mathbb{E}(X_3)\Big) = \frac{1}{3}$$

$\mathrm{Var}(X_1) = 1 \quad (X_1 \sim N(0,1))$

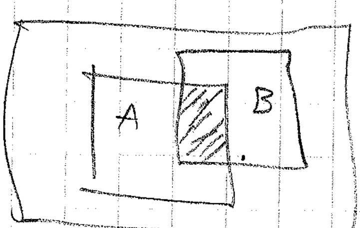
$$\mathrm{Var}(Y) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{1}{9}\Big(\underbrace{\mathrm{Var}(X_1)}_{=1} + \underbrace{\mathrm{Var}(X_2)}_{=4} + \underbrace{\mathrm{Var}(X_3)}_{=9}\Big) = \frac{14}{9}$$

$u/H_{>}^{\circ}$

$$\frac{\mathrm{Cov}(X_1, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 \cdot \sqrt{\frac{14}{9}}} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$\square$.

1. mellanföret 15.11.99 / SL I (lösningsförslag) I



1. Anta $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{10}$

(i) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

lös $$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{6}{20}=\frac{5+4-6}{20}=\frac{3}{20}$$

(ii) $$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=\frac{3}{20} \\ P(A)P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}\end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B) \overset{\text{dvs}}{\Rightarrow}$$ A och B inte oberoende händelser

(iii) $$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{5}}=\frac{3}{4}, \quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$

2. 10 boxarna delas upp i 3 typer
$$\begin{cases} A_{I}=\{\text{3 vita och 1 svart kula}\} & \text{3 st. boxar} \\ A_{II}=\{\text{2 vita och 4 blå kulor}\} & \text{3 st. boxar} \\ A_{III}=\{\text{5 vita och 5 gula kulor}\} & \text{4 st boxar}\end{cases}$$

Låt B = 2 vita kulor dras utan återläggning från box, som först väljs på måfå (från 10 givna boxar)

Totala sannolikhetslagen $\Rightarrow$

(*) $$P(B)=\underbrace{P(A_{I})}_{\text{sl välj box av typ I}=\frac{3}{10}}P(B|A_{I})+P(A_{II})P(B|A_{II})+P(A_{III})P(B|A_{III})$$

$$\Rightarrow P(A_{I})=P(A_{II})=\frac{3}{10},\ P(A_{III})=\frac{4}{10}$$

$$P(B|A_{I})=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$ (sl dra 2 vita utan återläggning från 3 vita och 1 svart kula)

alternativ: formel
$$P(B|A_{I})=P(\text{2 vita utan återläggning})=\frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Likaså $$P(B|A_{II})=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}, \quad P(B|A_{III})=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

insättning i (*) $\Rightarrow$

$$P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{15}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{135+18+80}{900}=\frac{233}{900}$$

1. mf. 15.11.99 / SLI

II

3. $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ frekvens Ω:

$$p_k = P(\{\omega : X_1(\omega) = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad , k = 0, 1, 2 \ldots$$

Anta: $Z = \min\{X_1, X_2\}$, $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ oberoende s.v.

$P(Z \geq 2) = \ ?$ dvs $Z(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$

Notera: $Z(\omega) \geq 2 \iff X_1(\omega) \geq 2$ och $X_2(\omega) \geq 2$. Alltså:

$$(*) \begin{cases} P(\{\omega : Z(\omega) \geq 2\}) = P(\{\omega : X_1(\omega) \geq 2\} \cap \{\omega : X_2(\omega) \geq 2\}) \\ \overset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} P(\{\omega : X_1(\omega) \geq 2\}) P(\{\omega : X_2(\omega) \geq 2\}) \end{cases}$$

påminn $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

komplement formeln $\Rightarrow$

$$P(\{\omega : X_1(\omega) \geq 2\}) = P(\{\omega : X_1(\omega) < 2\}^c) = 1 - P(\{\omega : X_1(\omega) = 0\} \cup \{\omega : X_1(\omega) = 1\})$$

$$\overset{\text{disjunkta}}{=} 1 - [\underbrace{P(\{\omega : X_1(\omega) = 0\})}_{= p_0} + \underbrace{P(\{\omega : X_1(\omega) = 1\})}_{= p_1}]$$

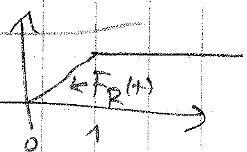
$$= 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)$$

på samma sätt $P(\{\omega : X_2(\omega) \geq 2\}) = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)$.

$$(*) \Rightarrow P(Z \geq 2) = (1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))^2$$

---

4. arean av cirkel med radien R $= \pi R^2 \overset{\text{def}}{=} Y(R)$

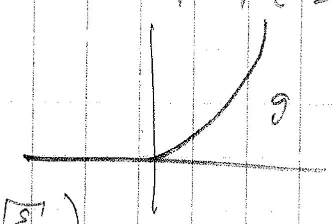


anta $R \sim \text{Tas}(0,1)$ s.v. , likformig fördelning på $(0,1)$

$$\overset{\text{Tas}(0,1)}{\Rightarrow} \text{fördelningsfunktion} \quad F_R(t) = P(\{\omega : R(\omega) \leq t\}) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

låt $g(t) = \pi t^2$, $t \geq 0$ $\Rightarrow$

arean $\pi R^2 = g(R) \overset{\text{def}}{=} Y$



g har invers funktion $g^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$g^{-1}(s) = \sqrt{\frac{s}{\pi}} \qquad (\text{eftersom } s = \pi t^2 \iff t = \sqrt{\tfrac{s}{\pi}})$$

$\Rightarrow$ Fördelningsfunktionen

$$F_Y(t) = P(\{\omega : \pi R^2(\omega) \leq t\}) = P(\{\omega : R(\omega) \leq g^{-1}(t)\})$$

$$= P(\{\omega : R(\omega) \leq \sqrt{\tfrac{t}{\pi}}\}) = F_R\left(\sqrt{\tfrac{t}{\pi}}\right) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sqrt{\frac{t}{\pi}}, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

1. uppg. 15.11.99 / SL I

(III)

frekvensfunktionen

där derivatan existerar

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{d}{dt}\left(F_Y(t)\right) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ eller } t > 1. \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

för $0 < t < 1$ sammansatt fktn: $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{\pi}} \overset{F_R}{\mapsto} F_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$

SLI / sf 14.12.99

(1.) (A.)

A_j = ~~Personen j:s kast rätt~~ j:s singlings gör klave

$\Rightarrow$ $P(A_j) = \frac{1}{2}$, $j = 1, \ldots 6$

$\{A_1, \ldots A_6\}$ $\perp\!\!\!\perp$ oberoende

$$P(k \text{ rätt}) = \binom{6}{k} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{6-k}} = \binom{6}{k} \frac{1}{2^6} \quad , k = 0, \ldots, 6$$

Bin$(6, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \quad P(5 \text{ eller } 6 \text{ rätt}) = P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{5}\frac{1}{2^6} + \binom{6}{6}\frac{1}{2^6}$$

$$= \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \underline{\underline{\frac{7}{64}}}$$

(2.)

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{1000}$ (enheten timme)

Deltagare $1, \ldots, 10$ $\Rightarrow$ livslängden

$X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$, $j = 1, \ldots, 10$

$\{X_1, \ldots, X_{10}\}$ $\perp\!\!\!\perp$ oberoende s.v.

j:s räknedosa fungerar hela förhöret $\Leftrightarrow$ $X_j \geq 4$

$$P(\text{alla räknedosor fungerar}) = P(X_1 \geq 4, X_2 \geq 4, \ldots, X_{10} \geq 4)$$

$$\stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{j=1}^{10} \underbrace{P(X_j \geq 4)}_{X_j \sim \text{Exp}(\lambda)} = \prod_{j=1}^{10} P(\{X_j < 4\}^c)$$

$$= \prod_{j=1}^{10} (1 - P(X_j < 4)) \stackrel{*}{=} \prod_{j=1}^{10} (1 - (1 - e^{-4\lambda}))$$

$$* = \int_0^4 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \Big/_0^4 e^{-\lambda t} = 1 - e^{-4\lambda}$$

$$= \prod_{j=1}^{10} e^{-4\lambda} = (e^{-4\lambda})^{10} = e^{-40\lambda} \underset{\lambda = \frac{1}{1000}}{=} e^{-\frac{40}{1000}} = e^{-\frac{1}{25}}$$

(3.) $X \sim Tas(0,1)$ $Y = e^X$ sammansatt s.v. (B)

$g(t) = e^t$ kontinuerlig, $Y = g(X)$

3.2 $\Rightarrow$ väntevärdet

$$E(e^X) = E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \Big/_0^1 e^x = e - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$ frekvensfunktionen till $X \sim Tas(0,1)$

variansen $D^2(e^X) = E((e^X)^2) - (E(e^X))^2$

som ovan $\Rightarrow$

$$E((e^X)^2) = E(h(X)) = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \Big/_0^1 \tfrac{1}{2} e^{2x} = \tfrac{1}{2}(e^2 - 1)$$

$h(t) = e^{2t}$

$$\Rightarrow D^2(e^X) = \tfrac{1}{2}(e^2-1) - (e-1)^2$$

(4.) $P(A) = \frac{1}{2}$

A_j = A inträffar i j:e upprepning, $j = 1, \dots, 1000$.

$\Rightarrow \{A_1, \dots A_{1000}\}$ oberoende (upprepningar).

låt S = antalet kronor $\Rightarrow$

$$S = \sum_{j=1}^{1000} 1_{A_j}$$

väntevärde $E(S) = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$

varians.

$$D^2(S) \overset{\perp\!\!\perp}{=} \sum_{j=1}^{1000} \underbrace{D^2(1_{A_j})}_{P(A_j)P(A_j^c) = \frac{1}{4}} = \frac{1000}{4} = 250 \Rightarrow \sqrt{D^2(S)} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$$

de Moivre-Laplace $\Rightarrow$

$$\frac{S - E(S)}{\sqrt{D^2(S)}} = \frac{S - 500}{5\sqrt{10}} \sim N(0,1) \text{-fördelad}$$

"normalisera"

$$\Rightarrow P(400 \le S \le 600) = P\left(\frac{400-500}{5\sqrt{10}} \le \frac{S-500}{5\sqrt{10}} \le \frac{600-500}{5\sqrt{10}}\right)$$

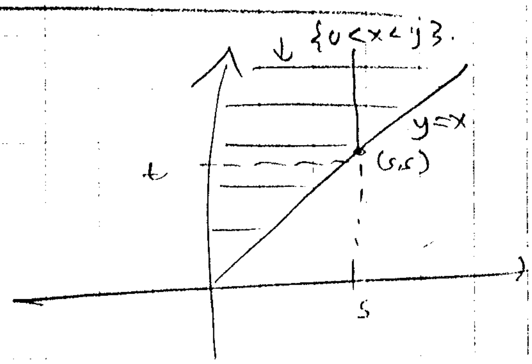
$$= P\left(\frac{-100}{5\sqrt{10}} \le \frac{S-E(S)}{\sqrt{D^2(S)}} \le \frac{100}{5\sqrt{10}}\right) = P\left(-\frac{20}{\sqrt{10}} \le \frac{S-E(S)}{\sqrt{D^2(S)}} \le \frac{20}{\sqrt{10}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{10}}\right)}_{1-\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) \text{ "symmetry"}} = 2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) - 1.$$

$$\left(\frac{20}{\sqrt{10}} \approx 6.328.. \Rightarrow \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) \approx .. \right).$$

(5.) inte provområdet 2015

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$



(i)

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)\,dy$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{om } s \le 0 \\ \int_s^{\infty} e^{-y}\,dy = -\Big/_{s}^{\infty} e^{-y} = e^{-s}, & s > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \int_0^t e^{-t}\,dx = te^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

(ii) betingade frekvensfkt.

$$x > 0 \Rightarrow \quad f_Y(y \mid X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 0, & y \le 0 < x \text{ eller } 0 < y \le x \\ \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}, & 0 < x < y \end{cases}$$

$f_Y(y \mid X = x)$ existerar inte om $x \le 0$.

$$y > 0 \Rightarrow \quad f_X(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 0, & \text{om } x \le 0 \text{ eller } x \ge y > 0 \\ \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y} & \text{om } 0 < x < y \end{cases}$$

$f_X(x \mid Y = y)$ inte definierat om $y \le 0$.

TNI/ SLI 18.1.2000

A.

1. (i) $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$. Väite: $P(A|B) \geq \frac{1}{2}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{2/3}$$

$P(A\cap B) = ?$

$$1 = P(\Omega) \geq P(A\cup B) = \underbrace{P(A)}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{P(B)}_{\frac{2}{3}} - P(A\cap B) = \frac{4}{3} - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) \geq \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$P(A|B) \geq \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

(ii)

luku 77539 — 5 alkion permutaatiot = lukumäärä # $5! = 120$

luku on permutaation jälkeen muotoa 77... jos

$$\begin{array}{ccc} 77539 & & 77539 \\ \downarrow\downarrow & \text{tai} & \times \\ 77\underbrace{\ldots} & & 77\underbrace{\ldots} \end{array}$$

mahdollisuuksia $3! = 6$ (3 alkion 539 permutaatiot) — mahdollisuuksia $3! = 6$ — yhteensä 12 mahdollisuutta

$$\Rightarrow P(\text{luku muotoa } 77\ldots) = \frac{12}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}.$$

---

2. Ol. $X \sim Tas(0,1)$, $Y = e^X$

$$\{\omega \in \Omega : e^{X(\omega)} \leq t\} = \emptyset \text{ jos } t \leq 0.$$

Ol. $t > 0$: $\quad e^{X(\omega)} \leq t \underset{\log(\cdot)}{\Longleftrightarrow} X(\omega) \leq \log t$

$0 < t \leq 1 \Rightarrow \log t < 0 \Rightarrow \{\omega : X(\omega) \leq \log t\} = \emptyset$

$t > 1 \Rightarrow \quad e^{X(\omega)} \leq t \Leftrightarrow 0 < X(\omega) \leq \log t$

ol. $F_X(s) = P(\{\omega : X(\omega) \leq s\})$ X:n kertymäfunktio

$X \sim Tas(0,1) \Rightarrow$

$$F_X(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ s, & 0 < s < 1 \\ 1, & s \geq 1 \end{cases}$$

Siis: jos $F_Y(t) = P(\{\omega : Y(\omega) \leq t\})$ on Y:n kertymäfunktio $\Rightarrow$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ F_X(\log t), & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ \log t, & 1 < t < e \\ 1, & t \geq e \end{cases}$$

(B.)

tiheysfunktio ? teoria $\Rightarrow$ $f_Y(t) = F_Y'(t)$ (kun derivaatta olemassa)

$$\Rightarrow f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t<1 \text{ tai } t>e \\ D(\log t), & 1<t<e \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<1 \text{ tai } t>e \\ \frac{1}{t}, & 1<t<e \end{cases}$$

(3.) ol. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ diskreetti sm, jolla tngf (2015: mdk:n kurssin omrädöt)

$$G(t) = G_X(t) = c(1+t+t^3)^{10}, \quad t \in \mathbb{R}$$

sopivalla vakiolla $c>0$.

teoria $\Rightarrow$
$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad \text{missä } p_k = P(\{\omega : X(\omega) = k\}), \quad k = 0,1,2\ldots$$

$\Rightarrow$ oltava $G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \Rightarrow$

ehto $1 = G(1) = c\,3^{10} \Rightarrow \underline{\underline{c = 3^{-10}}}$. eli $G(t) = 3^{-10}(1+t+t^3)^{10}$.

teoria $\Rightarrow$ odotusarvo $E(X) = G'(1)$

$$G'(t) = 3^{-10} \cdot 10\,(1+t+t^3)^9 \cdot (1+3t^2) \Rightarrow$$
$$G'(1) = 3^{-10} \cdot 10 \cdot 3^9 \cdot 4 = \frac{40 \cdot 3^9}{3^{10}} = \underline{\underline{\frac{40}{3}}}$$

(4.) noppaa heitetään 36 kertaa

olkoon X = ykkösten lukumäärä,

A = tapahtuma $5 \le X \le 7$

heittokerrat riippumattomia, $P(\text{saadaan } 1) = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ tarkka tn on

$$P(A) = \sum_{k=5}^{7} \underbrace{\binom{36}{k}}_{\text{k ykköstä 36 mahdollisesta}} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{36-k} = \sum_{k=5}^{7} \binom{36}{k} \frac{5^{36-k}}{6^{36}},$$

missä $\binom{36}{k} = \frac{36!}{k!\,(36-k)!}$

normaaliapproksimaatio: $X = \sum_{j=1}^{36} 1_{A_j}$, A_j = saadaan ykkönen j:nnellä heitolla

$$E(X) = \sum_{j=1}^{36} \underbrace{E(1_{A_j})}_{P(A)=\frac{1}{6}} = \frac{36}{6} = 6,$$

TNI/SLI 18.1.2000

$\boxed{D^2(\cdot) = Var(\cdot)}$ C.

$$D^2(1_{A_j}) \underset{\text{luku } 3.3}{\overset{\text{teoria}}{=}} P(A_j)P(A_j^c) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36} \Rightarrow$$

varianssi $$D^2(X) \overset{!!}{=} \sum_{j=1}^{36} D^2(1_{A_j}) = 36\cdot\frac{5}{36} = 5$$

Siis

$$P(A) = P(5 \le X \le 7) \overset{\text{jatkuvuuskorjaus}}{=} P(4{,}5 \le X \le 7{,}5)$$

$$= P\left(\frac{4{,}5-6}{\sqrt{5}} \le \frac{X-E(X)}{\sqrt{D^2(X)}} \le \frac{7{,}5-6}{\sqrt{5}}\right) = P\left(\frac{-1{,}5}{\sqrt{5}} \le \frac{X-E(X)}{\sqrt{D^2(X)}} \le \frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\overset{\text{luku } 4.2}{\approx} \Phi\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\right)}_{1-\Phi\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\right)} = \underline{\underline{2\Phi\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\right) - 1}}$$

$$\frac{X-E(X)}{D^2(X)} \sim N(0,1)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$\frac{1{,}5}{\sqrt{5}} \approx 0.672$, $\Phi(0.672) \approx 0.7486 \Rightarrow$

$2\Phi\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\right) - 1 \approx 0.4972\ldots$

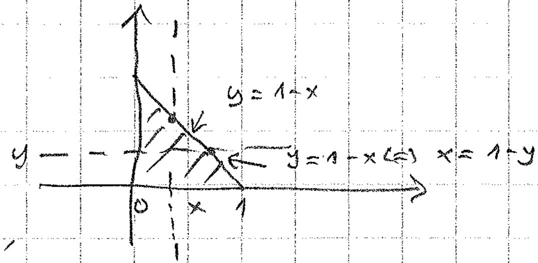
---

5. (X,Y) tiheysfunktiona

2015: inte i kursprovsområdet

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0<y<1-x, \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

(i) reunajakaumat



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ tai } x>1 \\ \int_0^{1-x} 6x\,dt = 6x(1-x), & 0<x<1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)\,ds = \begin{cases} 0, & y \le 0 \text{ tai } y \ge 1. \\ \int_0^{1-y} 6s\,ds = \Big/_0^{1-y} 3s^2 = 3(1-y)^2, & 0<y<1 \end{cases}$$

selvästi $f(x,y) = 6x \neq 18x(1-x)(1-y)^2$ kun $0<x<1$, $0<y<1-x$

$\Rightarrow X \not\perp\!\!\!\perp Y$ eivät riippumattomia

(ii) ehdollinen jakauma $f_Y(y \mid X=x)$

määritelty kun $f_X(x) > 0$ eli $0<x<1$

$$f_Y(y \mid X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 0 & \text{kun } 0<x<1,\ y \notin (0,1-x) \\ \frac{6x}{6x(1-x)} = \frac{1}{1-x} & \text{kun } 0<x<1,\ 0<y<1-x \end{cases}$$