Institutionen för matematik och statistik
Introduktion till sannolikhetskalkyl
Lösningsförslag till räkneövning 4
9.2.2015

1. (2:3) Från en box som innehåller 6 röda och 9 vita bollar drar man 3 bollar på måfå utan återlägging. Den stokastiska variabeln X beskriver antalet röda bollar i dragningen. Bestäm värdemängden av X samt frekvenssannolikheterna $p_k = P(X = k)$, då k tillhör värdemängden.

   Lösning: Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ eftersom de är de möjliga antalen röda bollar i dragningen. Som i uppgift 5 i andra räkneövningen kan vi beräkna p_k som

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{9}{3-k}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{6!}{k!(6-k)!} \cdot \frac{9!}{(3-k)!(6+k)!}}{\frac{15!}{3!12!}} = \frac{12!9!6!3!}{k!(6-k)!(6+k)!(3-k)!15!}$$

   då $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Vi väljer alltså först k röda bollar från de 6 röda bollarna som finns i boxen. Efter det väljer vi de resterande $3 - k$ bollar från de 9 vita bollarna. Detta delas med totala antalet sätt vi kan välja tre bollar ur 15 bollar. □

2. (2:7) Härled frekvenssannolikheterna till följande stokastiska variabler X:

   (i) X är antalet defekta enheter i en box som innehåller 48 produkter; vi antar att varje produkt har sannolikheten 0.05 att vara defekt oberoende av de övriga produkterna,

   (ii) X är antalet bollar i ett givet fack (n bollar, k fack),

   (iii) X är antalet gagnlösa kastomgångar vid upprepade kast av två tärningar, tills man erhåller ett par av sexor,

   (iv) X är antalet färgblinda personer i ett slumpmässigt urval av 10 personer (med återläggning) från en population med 100 personer, varav 3 personer är färgblinda.

   Lösning:

   (i) Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 48\}$. Här är X binomiellfördelad eftersom en produkt kan endera vara defekt eller utan fel oberoende av de övriga produkterna och värdemängden är diskret. Vi kan alltså beteckna $X \sim Bin(48,\ 0,05)$, och därmed är

$$P(X = k) = \binom{48}{k} 0,05^k (1 - 0,05)^{48-k} = \binom{48}{k} 0,05^k (0,95)^{48-k}.$$

   (ii) Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Här är X igen binomiellfördelad eftersom en boll kan endera placeras i det valda facket eller i något av de andra facken och värdemängden är diskret. Sannolikheten att vi placerar en boll i ett visst fack är $1/k$, och därför kan vi beteckna $X \sim Bin(n,\ 1/k)$. Därmed är

$$P(X = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{k}\right)^i \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-i}.$$

(iii) Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}^+$ eftersom det är möjligt att aldrig kasta två sexor. Nu eftersom det finns 36 olika sätt att kasta två tärningar och endast ett av dem är dubbla sexor kan vi erhålla

$$P(X = k) = \left(\frac{35}{36}\right)^k \frac{1}{36}.$$

Vi kastar alltså dubbla sexor på det (k+1):e kastet och någon annan kombination på de k första kasten. Därmed är X geometriskt fördelad och vi kan beteckna $X \sim \text{Geom}(1/36)$.

(iv) Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. På samma vis som i (i) märker vi att X är binomialfördelad ty värdemängden är diskret och valen av personer är oberoende av varandra pga. återläggning. Därmed är

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{100}\right)^k \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{100}\right)^k \left(\frac{97}{100}\right)^{10-k}.$$

$\square$

3. (2:6) En symmetriskt mynt singlas tills krona och klave har uppträtt åtminstone två gånger var. Låt X vara den kastomgång då spelet upphör. Härled frekvenssannoliheterna och fördelningsfunktionen till X och bestäm det minsta talet n för vilket

$$P(X \leq n) > 0.9.$$

Lösning: Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{4, 5, 6, \ldots\}$ eftersom det krävs åtminstone 4 kast för att singla åtminstone två kronor och klaver. Frekvenssannolikheten för värden $k \leq 3$ är därmed 0. För att spelet skall sluta på det k:te kastet finns det två möjligheter. Vi kan ha kastat $(k-2)$ stycken kronor och en klave och den andra klaven på det k:te kastet. Alternativt kan vi ha kastat $(k-2)$ stycken klavar och en krona och den andra kronan på det k:te kastet. Den första kronan (eller klaven symmetriskt) kan vi ha kasta när som helst, alltså det finns $(k-1)$ olika sätt att kasta den första kronan (eller klave). Därmed får vi att

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}_{\text{kronor}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{första klave}} (k-1) \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{andra klave}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}_{\text{klavar}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{första krona}} (k-1) \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{andra krona}} \\ &= \frac{k-1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

För att hitta födelningsfunktionen $F(k) = P(X \leq k)$ söker vi istället komplementet $P(X > k)$. Vi märker att de möjliga kombinationer av kast som resulterar att spelet tar slut efter k kast är alla de kombinationer där man har kastat högst en krona eller högst en klave vid det k:te kastet. Från detta kan vi erhålla att

$$\begin{aligned} P(X > k) = P(\text{"inga kronor efter k kast"}) + P(\text{"inga klavar efter k kast"}) \\ + P(\text{"exakt en krona efter k kast"}) + P(\text{"exakt en klave efter k kast"}). \end{aligned}$$

Eftersom slantsingling är symmetriskt och vi kan kasta vår enda krona på k olika ställen får vi att

$$\begin{aligned} P(X > k) &= 2 \cdot P(\text{"inga kronor efter k kast"}) + 2 \cdot P(\text{"exakt en krona efter k kast"}) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 2 \cdot \frac{1}{2^k} \cdot k = \frac{1+k}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Denna sannolikhet är komplementet till fördelningsfunktionen, alltså är

$$P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - \frac{1+k}{2^{k-1}}.$$

Nu märker vi att $P(X \leq 7) = 0,875$ men att $P(X \leq 8) \approx 0,93$, alltså är $k = 8$ det minsta talet så att $P(X \leq k) > 0,9$.

□

4. (2:21) En tärning kastas 4 gånger. Låt X vara det största av de ögontal som erhålls. Beräkna väntevärdet $\mathcal{E}(X)$.

Lösning: Värdemängden av X är $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och därmed är X diskret. Då vi söker efter frekvenssannolikheten $P(X = k)$ kan vi dela upp den i fyra olika möjligheter. Vi kan kasta så att en av tärningarna ger värdet k (resten något lägre), två tärningar ger värdet k, tre tärningar ger värdet k, eller att alla tärningar ger ögontalet k. Från detta kan vi beräkna att

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{6}\right)\binom{4}{1}\left(\frac{k-1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^2\binom{4}{2}\left(\frac{k-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3\binom{4}{3}\left(\frac{k-1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

och från detta får vi frekvenssannolikheterna för de olika värden av k:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \left(\frac{1}{6}\right)^4 & P(X = 2) &= \frac{5}{432} \\ P(X = 3) &= \frac{65}{1296} & P(X = 4) &= \frac{175}{1296} \\ P(X = 5) &= \frac{41}{144} & P(X = 6) &= \frac{671}{1296}. \end{aligned}$$

Väntevärdet är därmed

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) &= 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) \\ &\quad + 5P(X = 5) + 6P(X = 6) \approx 5,2446. \end{aligned}$$

□

5. (2:28) Bestäm konstanten c så att funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bildar frekvensfunktionen till en kontinuerlig stokastisk variabel X, där $f(x) = cxe^{-x}$ om $x > 0$ och $f(x) = 0$ annars. Beräkna fördelningsfunktionen F av X och sannolikheten $P(0 < X < 1)$.

Lösning: Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en frekvensfunktion till någon kontinuerlig stokastisk variabel om

(i) $f(x) \geq 0$, för alla $x \in \mathbb{R}$,

(ii) f är integrerbar och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

I praktiken räcker det att f(x) är kontinuerlig och att

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx = 1.$$

För det första inser vi att $c \geq 0$ krävs för att kravet (i) skulle kunna uppfyllas. Därtill märker vi att både $f(x) = 0$ och $f(x) = cxe^{-x}$ är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}$ (Analys I). Nu räcker det att undersöka gränsvärden för integralen (kom ihåg att funktionen är 0 då $x \leq 0$):

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 0\ dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b cxe^{-x}dx \\
&= 0 + \lim_{b\to\infty}\left(cx(-e^{-x})\Big|_0^b - \int_0^b c(-e^{-x})\right)dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-cbe^{-b} + c(-e^{-x})\Big|_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-cbe^{-b} - ce^{-b} + c\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} c(1 - be^{-b} - e^{-b}) \\
&= c
\end{aligned}$$

Observera att $\lim_{b\to\infty} be^{-b} = 0$ fås genom att tillämpa L'Hôpitals regel på kvoten. Nu för att f skall vara en frekvensfunktion bör vi välja $c = 1$. Nu kan vi definiera fördelningsfunktionen för X:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{då } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^0 0\ dt + \int_0^x te^{-t}dt = 1 - xe^{-x} - e^{-x}, & \text{då } x > 0 \end{cases}$$

Därtill söker vi $P(0 < X < 1)$ vilket vi kan beräkna genom att använda fördelningsfunktionen:

$$\begin{aligned}
P(0 < X < 1) = P(0 < X < 1) + 0 &= P(0 < X < 1) + P(X \leq 0) \\
&= P(X < 1) \\
&= P(X \leq 1) \\
&= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

$\square$

6. Bussar anländer till en hållplats kl 7.00, 7.15 och 7.30. Tidpunkten då en person kommer till hållplatsen är likformigt distribuerad mellan 7.00 och 7.30. Beräkna sannolikheten att personen bör vänta

   (i) mindre än 5 minuter på en buss,

   (ii) åtminstone 10 minuter på en buss.

   Lösning: En stokastisk slumpvariabel är likformigt distribuerad över ett intervall (a, b) om frekvensfunktionen för slumpvariabeln är

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{då } a < x < b \\ 0, & \text{då } x \geq b \text{ eller } x \leq a \end{cases}$$

   Låt X vara den slumpvariabel som ger tiden då en person anländer mellan klockan 7.00 och 7.30 och låt slumvariabeln vara likformigt distribuerad. Eftersom endast proportionerna av intervallet vi behandlar påverkar den likformiga fördelningen kan vi undersöka intervallet $(0, 30)$ som betecknar tiden i minuter efter klockan 7.00. Från detta får vi frekvensfunktionen för X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & \text{då } 0 < x < 30 \\ 0, & \text{då } x \geq 30 \text{ eller } x \leq 0. \end{cases}$$

   (i) En person måste vänta mindre än 5 minuter på en buss om hon anländer endera mellan 7.10 och 7.15 eller mellan 7.25 och 7.30. Detta betyder att

$$\begin{aligned}
&P(\text{"mindre än 5 minuter"}) \\
&\quad = P(\{\omega \in \Omega \mid 10 \leq X(\omega) \leq 15\} \cup \{\omega \in \Omega \mid 25 \leq X(\omega) \leq 30\}) \\
&\quad = P(\{\omega \in \Omega \mid 10 \leq X(\omega) \leq 15\}) + P(\{\omega \in \Omega \mid 25 \leq X(\omega) \leq 30\}) \\
&\quad = P(10 \leq X \leq 15) + P(25 \leq X \leq 30) \\
&\quad = \int_{10}^{15} f(t)dt + \int_{25}^{30} f(t)dt \\
&\quad = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}dt + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}dt \\
&\quad = 5 \cdot \frac{1}{30} + 5 \cdot \frac{1}{30} \\
&\quad = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(ii) En person måste vänta åtminstone 10 minuter på en buss om hon anländer endera mellan 7.00 och 7.05 eller mellan 7.15 och 7.20. Detta betyder att

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"åtminstone 10 minuter"}) \\
&\qquad = P(\{\omega \in \Omega \mid 0 \leq X(\omega) \leq 5\} \cup \{\omega \in \Omega \mid 15 \leq X(\omega) \leq 20\}) \\
&\qquad = P(\{\omega \in \Omega \mid 0 \leq X(\omega) \leq 5\}) + P(\{\omega \in \Omega \mid 15 \leq X(\omega) \leq 20\}) \\
&\qquad = P(0 \leq X \leq 5) + P(15 \leq X \leq 20) \\
&\qquad = \int_0^5 f(t)dt + \int_{15}^{20} f(t)dt \\
&\qquad = \int_0^5 \frac{1}{30}dt + \int_{15}^{20} \frac{1}{30}dt \\
&\qquad = 5 \cdot \frac{1}{30} + 5 \cdot \frac{1}{30} \\
&\qquad = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

□