Institutionen för matematik och statistik
Introduktion till sannolikhetskalkyl
Lösningsförslag till räkneövning 3
2.2.2015

1. (1:42) Ett sällskap som består av 3 män och 6 kvinnor, delas på måfå upp i 3 grupper med 3 personer var. Vilken är sannolikheten att

   (i) alla männen finns i samma grupp,

   (ii) det finns en man i varje grupp?

   Lösning: Basmängden Ω i uppgiften är alla de sätt vi kan dela upp 9 personer i tre gruppermed tre personer var. Detta kan vi räkna genom att använda multinomialkoefficienter:

$$\#\Omega = \binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680.$$

   (i) De sätt som vi kan välja alla män till samma grupp får vi genom att beräkna på hur många sätt vi kan dela upp 6 kvinnor i två grupper på tre. Då placeras automatiskt männen i den tredje gruppen. Eftersom männen kan vara i första, andra, eller tredje gruppen, så multiplicerar vi detta antal sätt med tre. Därmed är sannolikheten för händelsen:

$$P(\text{alla män i samma grupp}) = \frac{3 \cdot \binom{6}{3,3}}{1680} = \frac{3 \cdot \frac{6!}{3!3!}}{1680} = \frac{1}{28}.$$

   (ii) Då vi vill välja grupperna så att varje grupp har exakt en man så tolkar vi dessa sätt som två skilda val uttryckta av multinomialkoefficienter. Först delar vi upp mängden av tre män i tre grupper med storleken ett, och därefter delar vi upp gruppen på sex kvinnor i tre grupper med två kvinnor i varje grupp. Detta motsvarar händelsen som definierades i uppgiften, och sannolikheten är därmed:

$$P(\text{en man i varje grupp}) = \frac{\binom{3}{1,1,1}\binom{6}{2,2,2}}{1680} = \frac{\frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{6!}{2!2!2!}}{1680} = \frac{9}{28}.$$

□

2. (1:50) Visa: om $P(A) = P(B) = 2/3$, så är den betingade sannolikheten $P(A|B) \geq 1/2$.

   Lösning: Vi använder oss av formeln för betingade sannolikheter (a) och uppskattningsformeln för snittet av två mängder (*). Eftersom $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ så erhålls följande uppskattning:

$$P(A|B) \overset{(a)}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{(*)}{\geq} \frac{P(A) + P(B) - 1}{2/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

□

3. Betrakta $\Omega = \{1,2,3,4\}$ med den symmetriska sannolikheten $P(k) = 1/4$ för $k = 1,2,3,4$. Låt $A = \{1,4\}$, $B = \{2,4\}$ och $C = \{3,4\}$. Visa att händelserna $\{A,B,C\}$ är parvis oberoende, men inte oberoende.

   Lösning: Två händelser A och B är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

   Från uppgiften vet vi att

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1 \text{ eller } 4) = P(1) + P(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P(B) &= P(2 \text{ eller } 4) = P(2) + P(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ P(C) &= P(3 \text{ eller } 4) = P(3) + P(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   och därmed att

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(4) = \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C). \end{aligned}$$

   Från detta vet vi att händelserna A,B,C är parvis oberoende av varandra. För att visa att de inte är oberoende av varandra räcker det att konstatera att

$$P(A \cap B \cap C) = P(4) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

   □

4. (1:61) En fabrik producerar en produkt som kan ha tre olika typer av fel: A, B och C. Feltyperna uppträder oberoende av varandra med sannolikheterna $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.05$ och $P(C) = 0.01$. Vilken är sannolikheten att produkten

   (1) har alla tre felen,
   (2) inga fel,
   (3) (B eller C) men inte A,
   (4) högst ett fel.

   Lösning: Som hjälp i lösningarna kommer vi att använda följande lemma:

   Lemma 1. *Låt A,B,C vara händelser. Följande fyra egenskaper är ekvivalenta:*

   (i) $A,B,C \perp\!\!\!\perp$,
   (ii) $A^c,B,C \perp\!\!\!\perp$ *(symmetriskt även* $A,B^c,C \perp\!\!\!\perp$ *och* $A,B,C^c \perp\!\!\!\perp$*),*
   (iii) $A^c,B^c,C \perp\!\!\!\perp$ *(symmetriskt även* $A^c,B,C^c \perp\!\!\!\perp$ *och* $A,B^c,C^c \perp\!\!\!\perp$*) och*
   (iv) $A^c,B^c,C^c \perp\!\!\!\perp$.

   Bevis. Beviset förbigås, resultaten kan härledas ganska långt på samma vis som samma resultat bevisades för två mängder på föreläsningarna. □

Nu kan vi fortsätta med uppgiften.

(1) För att hitta sannolikheten för att alla fel uppkommer i produkten söker vi efter sannolikheten av händelsernas snitt. Eftersom händelserna A, B, C är oberoende kan vi beräkna att

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,01 = 0,00005.$$

(2) För att hitta sannolikheten för att inget fel uppkommer i produkten söker vi efter sannolikheten av snittet av komplementen till händelserna. Genom att tillämpa lemma 1 kan vi konstatera att komplementen är även oberoende, alltså är

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c)P(B^c)P(C^c) = 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,99 = 0,84645.$$

(3) För att hitta sannolikheten för att nåndera fel B eller C men inte A uppkommer i produkten söker vi efter sannolikheten $P((B \cup C) \cap A^c)$. Här kan vi igen tillämpa lemma 1:

$$\begin{aligned}
P((B \cup C) \cap A^c) &= P((A^c \cap B) \cup (A^c \cap C)) \\
&= P(A^c \cap B) + P(A^c \cap C) - P(A^c \cap B \cap C) \\
&= P(A^c)P(B) + P(A^c)P(C) - P(A^c)P(B)P(C) \\
&= 0,9 \cdot 0,05 + 0,9 \cdot 0,01 - 0,9 \cdot 0,05 \cdot 0,01 = 0,05355.
\end{aligned}$$

(4) För att hitta sanolikheten för att högst ett av felen uppkommer i en produkt undersöker vi händelsen

$$(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C).$$

Unionen består av fyra disjunkta mängder, vilket betyder att vi kan dela upp sannolikheten:

$$\begin{aligned}
&P((A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)) \\
&= P((A^c \cap B^c \cap C^c)) + P((A \cap B^c \cap C^c)) + \\
&\qquad P((A^c \cap B \cap C^c)) + P((A^c \cap B^c \cap C)) \\
&= 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,99 + 0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,99 + 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,01 + 0,9 \cdot 0,05 \cdot 0,99 \\
&= 0,9936.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Anta att platserna A och B sammanbinds av två vägar, och platserna B och C likaså av två vägar. Anta vidare att varje väg har sannolikheten p att vara stängd, oberoende av de andra vägarna. Beräkna sannolikheten att det finns (åtminstone) en öppen väg från A till C.

Lösning: Låt V och X vara vägarna som binder samman platserna A och B, och låt Y och Z vara de vägar som binder samman platserna B och C. Låt $P(V) = P(X) = P(Y) = P(Z) = p$ beteckna den sannolikhet att en av vägarna V, X, Y, Z är stängd. Dessa händelser är oberoende av varandra enligt uppgiften. För att det inte skall finnas en enda rutt från A till C måste både V och X eller både Y och Z vara stängda. Sannolikheten för att det finns åtminstone en rutt från A till C hittas som denna händelses komplement:

$$\begin{aligned} P(\text{åtminstone en öppen rutt från A till C}) &= 1 - P((V \cap X) \cup (Y \cap Z)) \\ &= 1 - P(V \cap X) - P(Y \cap Z) + P(V \cap X \cap Y \cap Z) \\ &= 1 - P(V)P(X) - P(Y)P(Z) + P(V)P(X)P(Y)P(Z) \\ &= 1 - p^2 - p^2 + p^4 = (p^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

□

6. (1:74) I tre boxar I, II, och III finns följande typer av mynt:

   Box I innehåller 2 guldmynt,

   Box II innehåller ett guld- och ett silvermynt,

   Box III innehåller 2 silvermynt.

   Man väljer först slumpmässigt en box och drar därefter från boxen på måfå ett mynt utan återläggning. Anta att det dragna myntet är ett guldmynt. Vilken är den betingade sannolikheten (med detta villkor) att också det andra myntet som dras från samma box är ett guldmynt?

   Lösning: Låt G_1 = ”ett guldmynt plockas som första val” och G_2 = ”ett guldmynt plockas som andra val”. I uppgiften vill vi beräkna den betingade sannolikheten

$$P(G_2|G_1) = \frac{P(G_2 \cap G_1)}{P(G_1)}.$$

   Låt nu L_1, L_2, L_3 vara händelserna där vi väljer första lådan, andra lådan, respektive tredje lådan. Lådan väljs slumpmässigt vilket betyder att $P(L_i) = 1/3$ för $i = 1, 2, 3$. Vi märker att både G_1 och G_2 händer endast om vi har valt första lådan, alltså att L_1 händer. Därmed gäller att

$$P(G_1 \cap G_2) = P(L_1) = \frac{1}{3}.$$

   Eftersom vi kan endast välja en låda så är L_1, L_2, L_3 disjunkta händelser som utgör hela utfallsrymden, vilket betyder att

$$G_1 = (G_1 \cap L_1) \cup (G_1 \cap L_2) \cup (G_1 \cap L_3).$$

   Sannolikheten för att vi väljer ett guldmynt som vårt första val är alltså sannolikheten av unionen av händelserna där vi väljer ett guldmynt som första val från någon av lådorna. För att hitta $P(G_1)$ kan vi använda oss av ekvationen ovan på följande vis:

$$\begin{aligned} P(G_1) &= \sum_{i=1}^{3} P(G_1 \cap L_i) = \sum_{i=1}^{3} P(L_i)P(G_1|L_i) \\ &= P(L_1)P(G_1|L_1) + P(L_2)P(G_1|L_2) + P(L_2)P(G_1|L_2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Därmed är

$$P(G_2|G_1) = \frac{P(G_2 \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Kommentar. Uppgiften kan alternativt lösas med hjälp av Bayes formel. Nämligen, enda möjligheten att välja ett andra guldmynt kommer ifall vi har valt låda L_1 i första skedet. Vi söker alltså den betingade sannolikheten $P(L_1|G_1)$. Enligt Bayes formel är

$$P(L_1|G_1) = \frac{P(G_1|L_1)P(L_1)}{P(G_1)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3},$$

där sannolikheten $P(G_1)$ beräknas som ovan.

□