Institutionen för matematik och statistik
Introduktion till sannolikhetskalkyl
Lösningsförslag till räkneövning 2
26.1.2015

1. Ett binärt tal av längden 6 har formen $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, där $a_j \in \{0,1\}$ för varje $j = 1, \dots, 6$. Varje tal a_j väljs slumpmässigt från $\{0,1\}$. Vilken är sannolikheten att det binära talet

   (i) innehåller exakt två nollor,

   (ii) innehåller högst två nollor?

   Lösning:

   Basmängden är $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \mid a_i \in \{0,1\}\}$ och därmed är $\#\Omega = 2^6 = 64$ eftersom vi kan välja första siffran på två sätt, andra siffran på två sätt osv.

   (i) Vi söker $P(A)$ då $A = \{x \in \Omega \mid \text{exakt två av } a_i \text{ är noll}\}$. Om vi nu tänker oss att ett av talen är noll så är det som att vi hade valt talet, och därför kan uppgiften kan uttryckas som att beräkna på hur många sätt vi kan välja två element från mängden $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Detta val kan beräknas genom att använda binomialkoefficienter. Kom ihåg att
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
   beräknar på hur många sätt vi kan välja k element från en mängd med n element. Därför är
   $$\#A = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$
   och följdaktligen är
   $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{15}{64}.$$

   (ii) Vi söker $P(A)$ då $A = \{x \in \Omega \mid \text{högst två av } a_i \text{ är noll }\}$. Nu är
   $$P(A) = P(\text{"exakt två nollor"}) + P(\text{"exakt en nollor"}) + P(\text{"exakt ingen nolla"}).$$
   Denna uträkning är möjlig eftersom mängderna är disjunkta. Det finns sex olika möjligheter så att vi har en nolla i talet, och endast en möjlighet så att talet har ingen nolla (då är alla ettor). Från detta kan vi beräkna att
   $$P(\text{"exakt två noll"}) = \frac{6}{64} \text{ och } P(\text{"exakt ingen noll"}) = \frac{1}{64}$$
   och från detta kan vi erhålla att
   $$P(A) = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}.$$

   □

2. Bokstäverna i ordet

$$HALPAHALLI$$

permuteras på ett godtyckligt sätt. Vilken är sannolikheten att man erhåller samma ord igen?

Lösning:

Denna uppgift kan lösas på två olika sätt som kom fram under räkneövningen. Den ena lösningen använder sig av multiplikationsprincipen och den andra av multinomialkoefficienter (som behandlades på kursen först denna vecka). Sannolikhetsrummet och basmängden som undersöks ändrar beroende på lösningssättet, och därför följer här båda lösningarna för helhetens skull:

Lösning 1 Då vi använder oss av multiplikationsprincipen måste vi undersöka basmängden Ω som innehåller alla möjliga permutationerna av ordet HALPAHALLI, inkluderat duplikat. Vi söker P(A) då $A = \{$alla permutationer av formen HALPAHALLI$\}$. Eftersom vi kan välja första bokstaven på 10 olika sätt, nästa på 9 olika sätt osv. så är antalet ord i basmängden

$$\#\Omega = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!.$$

För att beräkna mängden sätt vi kan skriva ordet HALPAHALLI genom att permutera bokstäverna använder vi multiplikationsprincipen. Bokstäverna H kan i sina rätta positioner permuteras på 2! olika sätt så att det sökta ordet behålls samma. Bokstäverna A kan permuteras på 3! olika sätt, bokstäverna L på 3! olika sätt, bokstaven P på 1! sätt, och bokstaven I också på 1! sätt. Detta betyder att den totala mängden permutationer som ger ordet HALPAHALLI är 2!3!3!1!1! = 72. Från detta erhålls att

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{72}{10!}.$$

Lösning 2 Då vi använder oss av multinomialkoefficienter arbetar vi inom basmängden Ω som består av alla unika permutationer av ordet HALPAHALLI. Detta beror på att multinomialkoefficienterna inte kan urskilja mellan mängder som innehåller samma element. Vi söker alltså nu P(A) då

$$A = \{\text{alla unika permutationer av formen HALPAHALLI}\}.$$

Eftersom basmängden inte innehåller duplikat finns det exakt ett ord i den som motsvarar ordet HALPAHALLI. Därmed är $\#A = 1$. Multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

beräknar på hur många sätt vi kan dela en mängd med n element i m olika unika mängder så att den första mängden innehåller k_1 element, det andra k_2 element osv. Därmed ger

$$\#\Omega = \binom{10}{2, 3, 3, 1, 1} = \frac{10!}{2!3!3!1!1!} = \frac{10!}{72}$$

mängden unika ord som kan byggas av dessa bokstäver. Multinomialkoefficienten delar alltså helt enkelt bort de permutationer av likadana bokstäver som skulle resultera i samma ord. Slutligen kan vi alltså komma till samma svar som i första lösningen:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{\left(\frac{10!}{72}\right)} = \frac{72}{10!}.$$

□

3. (1:19) I ett alfabet finns 10 bokstäver. Hur många olika ord kan man bilda som har (i) exakt 10 bokstäver, (ii) högst 10 bokstäver? Hur lång tid tar det att gå igenom dessa ord, då läsaren läser ett ord varje millisekund ($= 10^{-3}$ sekund)?

   Lösning:

   (i) Eftersom vi får använda oss på nytt av bokstäver kan vi välja första bokstaven på 10 olika sätt, nästa på 10 olika sätt osv. Enligt multiplikationsprincipen finns det därmed 10^{10} olika ord med exakt 10 bokstäver och det tar $10^{10} \cdot 10^{-3} = 10^7$ sekunder att läsa dem alla.

   (ii) Vi söker antalet av alla ord som har mellan 0 och 10 bokstäver. Eftersom varje mängd är disjunkt får vi antalet genom att summa ihop multiplikationprincipens resultat:

   $$\sum_{k=0}^{10} 10^k = 10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{10} = \frac{10^{11} - 1}{10 - 1}.$$

   Därtill tar det

   $$\frac{10^{11} - 1}{9} \cdot 10^{-3} \text{ sekunder}$$

   att läsa dessa ord.

□

4. (1:23) Bland 10 lotter finns det 2 vinstlotter. Vilken är sannolikheten att det bland 5 slumpmässigt valda lotter finns

   (i) åtminstone en vinstlott,

   (ii) båda vinstlotterna,

   (iii) exakt en vinstlott?

   Lösning:

   Basmängden i uppgiften är $\Omega = \{\text{alla möjliga val av 5 lotter}\}$ och därmed är

   $$\#\Omega = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252.$$

   (i) Vi vill beräkna P(A) då $A = \{x \in \Omega \mid x \text{ innehåller åtminstone en vinst}\}$. Vi beräknar komplementsannolikheten som är sannolikheten för att valet inte innehåller en enda vinstlott. För att beräkna mängden sätt vi kan lyckas välja noll stycken vinstlotter använder vi oss av binomialkoefficienter. Först måste vi beräkna på hur många sätt vi kan välja noll stycken vinstlotter av de två vinstlotter som finns med. Därefter beräknar vi på hur många sätt vi kan välja fem lotter av de resterande åtta lotter som inte har vinst, ty då har vi valt totalt fem lotter. Genom att använda multiplikationsprincipen är då

$$\#A^c = \binom{2}{0}\binom{8}{5} = \frac{2!}{0!2!} \cdot \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Från detta kan vi erhålla slutliga sannolikheten på följande sätt:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{56}{252} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

(ii) Vi vill beräkna P(B) då $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ innehåller båda vinstlotterna}\}$. På liknande sätt som i del (i) väljer vi först två lotter av de två vinstlotterna, och därefter väljer tre lotter från de resterande 8 (så att vi fortfarande väljer totalt fem lotter). Då är

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{252} = \frac{56}{252} = \frac{2}{9}.$$

(iii) Vi vill beräkna P(C) då $C = \{x \in \Omega \mid x \text{ innehåller exakt en vinstlott}\}$. Nu räcker det att beräkna komplementsannolikheten för unionen av de händelser vi redan beräknat i (i) och (ii), ty

$$P(C) = 1 - P(B) - P(A^c) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

□

5. (1:33) I en box finns 6 röda och 9 vita bollar. I ett försök drar man 3 bollar utan återläggning. Beräkna sannolikheterna av följande händelser:

   A = åtminstone en boll är röd,

   B = alla bollar är röda,

   C = bollarna har samma färg,

   D = i dragningen finns både röda och vita bollar.

Lösning:

Basmängden i uppgiften är $\Omega = \{\text{alla möjliga val av tre bollar}\}$ och därför är

$$\#\Omega = \binom{15}{3} = 455.$$

För att beräkna P(A) beräknar vi komplementsannolikheten vilket betyder sannolikheten för att ingen boll är röd i valet. Liknande som i uppgift 4 beräknar vi på hur många sätt vi kan välja noll stycken röda bollar och på hur många sätt vi kan välja tre stycken vita bollar genom att använda binomialkoefficienter. Då får vi att

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{9}{3}}{455} = 1 - \frac{12}{65} = \frac{53}{65}.$$

För att beräkna P(B) beräknar vi på hur många sätt vi kan välja tre stycken röda bollar och på hur många sätt vi kan välja noll stycken vita bollar genom att använda binomialkoefficienter. Detta ger oss igen antalet sätt som händelsen B kan inträffa. Därmed får vi att

$$P(B) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{0}}{455} = \frac{4}{91}.$$

Sannolikheten P(C) består av unionen av händelserna $A^c = \{\text{alla bollar är vita}\}$ och $B = \{\text{alla bollar är röda}\}$, båda av vilka beräknades tidigare. Alltså erhåller vi att

$$P(C) = P(A^c \cup B) \overset{(*)}{=} P(A^c) + P(B) = \frac{53}{65} + \frac{4}{91} = \frac{8}{35}.$$

Observera att (*) gäller eftersom händelserna A^c och B är disjunkta. Sannolikheten P(D) kan vi enkelt beräkna som komplementet till sannolikheten av P(C), alltså är

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{8}{35} = \frac{27}{35}.$$

□

6. (1:38) En grupp som innehåller $2n$ pojkar och $2n$ flickor delas på ett slumpmässigt sätt i två grupper av samma storlek. Vilken är sannolikheten att det finns lika många flickor som pojkar i båda grupperna? Uppskatta denna sannolikhet med hjälp av Stirlings formel då n är stort.

Lösning:

Basmängden Ω i uppgiften är alla sätt att dela upp gruppen i två lika stora grupper. Totala antalet personer i gruppen är $4n$. Om gruppen skall delas i två lika stora grupper så måste gruppernas storlek givetvis vara $2n$. Antalet sätt vi kan dela upp gruppen i två delar kan tänkas som antalet sätt vi kan välja $2n$ personer från en grupp med $4n$ personer. Alltså är

$$\#\Omega = \binom{4n}{2n} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}.$$

Nu för att beräkna P(A) där A är de sätt att dela upp gruppen så att det finns lika många pojkar och flickor i båda grupperna måste vi tänka uppdelningen som ett enda val. För att få lika många flickor och pojkar i båda grupperna måste vi ha n flickor och n pojkar i båda grupperna. Detta händer om vi väljer "bort" n styckern pojkar från de $2n$ pojkar som finns och väljer "bort" n stycken flickor från de $2n$ flickor som finns. Sannolikheten för detta är därmed

$$P(A) = \frac{\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}}{\frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}} = \frac{(2n)!(2n)!(2n)!(2n)!}{n!n!n!n!(4n)!} = \frac{((2n)!)^4}{(n!)^4(4n)!}.$$

För att uppskatta denna sannolikhet då n är stort använder vi oss av Stirlings formel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Genom att substituera $2n$ och $4n$ istället för n i formeln där det behövs kan vi erhålla följande uppskattning:

$$\begin{aligned}P(A) &\approx \frac{(\sqrt{2\pi 2n})^4\left(\frac{2n}{e}\right)^{8n}}{(\sqrt{2\pi n})^4\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}\cdot\sqrt{2\pi 4n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}} = \frac{(4\pi n)^2(2n)^{8n}e^{4n}e^{4n}}{(2\pi n)^2 n^{4n}\sqrt{8\pi n}(4n)^{4n}e^{8n}}\\ &= \frac{16\cdot(2n)^{8n}}{4n^{4n}\cdot\sqrt{8\pi n}\cdot 4^{4n}\cdot n^{4n}} = \frac{4}{\sqrt{8\pi n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}.\end{aligned}$$

□