Institutionen för matematik och statistik
Introduktion till sannolikhetskalkyl
Lösningsförslag till räkneövning 1
19.1.2015

1. Ett tal väljs godtyckligt från talen $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Vilken är sannolikheten att talet är

   (i) delbart med 7,

   (ii) delbart med 7 men inte med 17,

   (iii) en kvadrat av ett heltal,

   (iv) en kub av ett heltal?

   Lösning: Basmängden i uppgiften är $\Omega = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ och vi undersöker olika möjliga utfall.

   (i) Vi söker $P(A)$ då $A = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \text{ är delbart med } 7 \}$. Ett heltal som är delbart med 7 kan skrivas i formen $7k$ då $k \in \mathbb{N}$. Det största $k \in \mathbb{N}$ så att $7k \leq 1000$ är $k = 142$ vilket betyder att $\#A = 142$. Enligt den klassiska sannolikhetsmodellen är därmed

   $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{142}{1000} = \frac{71}{500}.$$

   (ii) Vi söker $P(B)$ då $B = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \text{ är delbart med 7 men inte med } 17 \}$. De heltal som är delbara med både 7 och 17 kan skrivas i formen $7 \cdot 17k$ då $k \in \mathbb{N}$ eftersom både 7 och 17 är primtal. Det största $k \in \mathbb{N}$ så att $7 \cdot 17k \leq 1000$ är $k = 8$ vilket betyder att $\#B = 8$. Enligt den klassiska sannolikhetsmodellen är därmed

   $$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\#A - 8}{\#\Omega} = \frac{142 - 8}{1000} = \frac{134}{1000}.$$

   (iii) Vi söker $P(C)$ då $C = \{ \omega \in \Omega \mid \omega = k^2, k \in \mathbb{N} \}$. Det största $k \in \mathbb{N}$ så att $k^2 \leq 1000$ är $k = 31$ vilket betyder att $\#C = 31$. Enligt den klassiska sannolikhetsmodellen är därmed

   $$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{31}{1000}.$$

   (iv) Vi söker $P(D)$ då $D = \{ \omega \in \Omega \mid \omega = k^3, k \in \mathbb{N} \}$. Det största $k \in \mathbb{N}$ så att $k^3 \leq 1000$ är $k = 10$ vilket betyder att $\#D = 10$. Enligt den klassiska sannolikhetsmodellen är därmed

   $$P(D) = \frac{\#D}{\#\Omega} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}.$$

   □

2. Två tärningar kastas. Beräkna sannolikheten av händelsen

(i) summan av ögontalen är 8,

(ii) båda ögontalen är ≤ 3,

(iii) åtminstone ett av ögontalen är ≤ 3 ,

Lösning: Basmängden för alla möjliga tärningskast är $\Omega = \{\ (a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Antalet utfall i basmängden är $\#\Omega = 6^2 = 36$.

(i) Elementärhändelserna som tillhör händelsen $A = \{\omega \in \Omega \mid \text{summan av båda ögontalen är } 8\ \}$ är (2,6), (3,5), (4,4), (5,3) och (6,2). Från detta vet vi att $\#A = 5$ och därmed är

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5}{36}.$$

(ii) Elementärhändelserna som tillhör händelsen $B = \{\omega \in \Omega \mid \text{ båda ögontalen är mindre eller lika med } 3\}$ är (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2), (2,3), (3,2) och (3,3). Från detta vet vi att $\#B = 9$ och därmed är

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

(iii) Elementärhändelserna som inte tillhör händelsen $C = \{\omega \in \Omega \mid \text{ åtminstone ett av ögontalen är mindre elle}$ är (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5) och (6,6). Genom att ta bort dessa från basmängden vet vi att $\#C = 36 - 9 = 27$ och därmed är

$$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}.$$

□

3. Låt A och B vara händelser.

(i) Uttryck följande händelser med hjälp av mängdoperationer. Av händelserna A och B gäller att (a) båda inträffar, (b) ingendera inträffar, (c) åtminstone en inträffar, (d) exakt en inträffar.

(ii) Beräkna motsvarande sannolikheter i fallen (a)-(d) med hjälp av $P(A)$, $P(B)$ och $P(A \cap B)$.

Lösning:

(i) (a) $A \cap B$

(b) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

(c) $A \cup B$

(d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

(ii) (a) $P(A \cap B)$

(b) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(d) $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) - \overbrace{P((A \setminus B) \cap (B \setminus A))}^{0} = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$\square$

4. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum. Visa att *Booles olikheter* gäller:

   (i) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ för alla $A, B \in \mathcal{F}$,

   (ii) $P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c)$ för alla $A, B \in \mathcal{F}$.

   Lösning:

   (i) Låt $A, B \in \mathcal{F}$. Eftersom P är ett sannolikhetsmått så är $P(A \cap B) \geq 0$. Från detta och summaformeln (sf.) kan vi erhålla

   $$P(A \cup B) \overset{\text{sf.}}{=} P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0} \leq P(A) + P(B).$$

   (ii) Låt $A, B \in \mathcal{F}$. Eftersom P är ett sannolikhetsmått så är $P(A \cup B) \leq 1$. Från detta och från summaformelns (sf.) symmetri gällande snitt och union kan vi erhålla

   $$\begin{aligned} P(A \cap B) \overset{\text{sf.}}{=} P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cup B)}^{\leq 1} &\geq P(A) + P(B) - 1 \\ &= 1 - P(A^c) + 1 - P(B^c) - 1 \\ &= 1 - P(A^c) - P(B^c). \end{aligned}$$

$\square$

5. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum. Härled inklusions- och exklusionsprincipen

   $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

   för tre godtyckliga mängder $A, B, C \in \mathcal{F}$ från motsvarande summaformel för $P(A_1 \cup A_2)$.

   Lösning: Låt $A, B, C \in \mathcal{F}$. Eftersom union och snitt är associativa och distributiva operationer kan vi genom upprepad användning av summaformeln erhålla följande:

   $$\begin{aligned} P((A \cup B) \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap A)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \underbrace{P(A \cap C \cap B \cap C)}_{P(A \cap B \cap C)} \end{aligned}$$

$\square$

6. I en stad ger man ut tre tidningar (A, B, C). I en undersökning om läsvanor av fullvuxna personer observerades att dessa tidningar lästes regelbundet enligt följande:

A: 20%	B: 16 %	C: 14 %
A och B: 8 %	A och C: 5 %	B och C: 4 %
	A och B och C: 2 %	

   Man betraktar en godtycklig fullvuxen person. Vilken är sannolikheten att personen

(i) inte läser någon av tidningarna regelbundet,

(ii) läser regelbundet A, men varken B eller C,

(iii) läser regelbundet exakt en av dessa tidningar?

Lösning:

(i) Vi är intresserade av händelsen $A^c \cap B^c \cap C^c$ och tillämpar De Morgans lagar (DM), formeln för komplementhändelser (*) och summaformeln för tre mängder ($\triangle$) på följande vis:

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c \cap C^c) &\overset{\text{DM}}{=} P((A \cup (B^c \cap C^c)^c)^c) \\
&\overset{*}{=} 1 - P(A \cup (B^c \cap C^c)^c) \\
&\overset{\text{DM}}{=} 1 - P(A \cup B \cup C) \\
&\overset{\triangle}{=} 1 - P(A) - P(B) - P(C) \\
&\qquad + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= 1 - 0,2 - 0,16 - 0,14 + 0,08 + 0,05 + 0,04 - 0,02 = 0,65.
\end{aligned}$$

(ii) Vi är intresserade av händelsen $A \setminus (B \cup C)$ och tillämpar differensformeln (DF), distributiviteten av snittet (*) och summaformeln ($\triangle$) på följande vis:

$$\begin{aligned}
P(A \setminus (B \cup C)) &\overset{\text{DF}}{=} P(A) - P(A \cap (B \cup C)) \\
&\overset{*}{=} P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&\overset{\triangle}{=} P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + \underbrace{P((A \cap B) \cap (A \cap C))}_{P(A \cap B \cap C)} \\
&= 0,2 - 0,08 - 0,05 + 0,02 = 0,09.
\end{aligned}$$

(iii) Vi är intresserade av händelsen $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$. Händelserna i denna union är disjunkta, vilket betyder att vi kan beräkna unionens sannolikhet genom att addera de skilda sannolikheterna:

$$\begin{aligned}
&P((A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))) \\
&\qquad = P((A \setminus (B \cup C))) + P((B \setminus (A \cup C))) + P((C \setminus (A \cup B))).
\end{aligned}$$

Vi utförde redan en motsvarande räkning för dessa sannolikheter i del (ii) och erhåller därmed följande sannolikheter:

$$\begin{aligned}
P((A \setminus (B \cup C))) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= 0,2 - 0,08 - 0,05 + 0,02 = 0,09,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P((B \setminus (A \cup C))) &= P(B) - P(B \cap A) - P(B \cap C) + P(B \cap A \cap C) \\
&= 0,16 - 0,08 - 0,04 + 0,02 = 0,06,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P((C \setminus (A \cup B))) &= P(C) - P(C \cap A) - P(C \cap B) + P(C \cap A \cap B) \\
&= 0,14 - 0,05 - 0,04 + 0,02 = 0,07.
\end{aligned}
$$

Därmed är den slutliga sannolikheten lika med

$$
P((A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))) = 0,09 + 0,06 + 0,07 = 0,22.
$$