Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 4, 4.5.2015

Kuvatkoon harjoitusten 3 mukainen prosessi Z vakuutetun tilaa ajassa. Oletetaan, että viipymisajat $\tau_1, \ldots, \tau_{K+1}$ ovat tehtävän 4 mukaiset ja että $K \geq 2$. Vakuutuskausi on n vuotta. Yhtiö korvaa vakuutetulle summan S_K hetkellä T_K, jos $T_K \leq n$. Vakuutus maksetaan hetkellä 0 ekvivalenssiperiaatteen mukaisella kertamaksulla P. Korkoutuvuus on vakio $\delta \geq 0$. Olkoon $F_{j,K}$ muuttujan $\tau_j + \cdots + \tau_K$ kertymäfunktio, $M_{k,k+1} = N_{k,k+1} - \Lambda_{k,k+1}$ ja

$$\begin{aligned}
V_{k,1}(t,v) &= e^{\delta t} S_K \int_t^n \left[\mu_{k+1}(u-v) e^{-\int_{t-v}^{u-v} \mu_{k+1}(s)ds} \int_0^{n-u} e^{-\delta(w+u)} dF_{k+2,K}(w) \right] du, \\
V_{k,2}(t,v) &= e^{\delta t} S_K \int_t^n \left[\mu_{k+1}(u-v) e^{-\int_{t-v}^{u-v} \mu_{k+1}(s)ds} e^{-\delta u} \right] du, \\
V_k(t,v) &= \begin{cases} V_{k,1}(t,v), & \text{jos } k \leq K-2, \\ V_{k,2}(t,v), & \text{jos } k = K-1, \end{cases}
\end{aligned}$$

kun $0 \leq v \leq t \leq n$. Sovitaan lisäksi, että $V_k(t,v) = 0$, kun $t < v$.

1. Vakuutuksen vastuuvelka $V(t)$ hetkellä $t \in [0,n]$ määritellään ehdosta

$$V(t) = \mathbb{E}\left(S_K \int_t^n e^{-\delta(u-t)} dN_{K-1,K}(u) | \mathcal{F}_t \right).$$

Tällöin

$$V(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{1}(Z(t) = k)\, V_k(t, T_k).$$

Todista tästä väitteestä seuraava osa: jos $B_{K-1} \in \mathcal{B}^{K-1} \cap (0,t]^{K-1}$, niin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathbb{1}((T_1, \ldots, T_{K-1}) \in B_{K-1}, T_K > t)\, S_K \int_t^n e^{-\delta(u-t)} dN_{K-1,K}(u) \right) \\
=\ &\mathbb{E}\left(\mathbb{1}((T_1, \ldots, T_{K-1}) \in B_{K-1}, T_K > t)\, V_{K-1}(t, T_{K-1}) \right).
\end{aligned}$$

2. Funktiot $V_{k,1}$ ja $V_{k,2}$ toteuttavat alueessa $n > t > v > 0$ differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} V_{k,1}(t,v) &= (\delta + \mu_{k+1}(t-v)) V_{k,1}(t,v) - \mu_{k+1}(t-v) V_{k+1}(t,t), \quad k \leq K-2, \\
\frac{\partial}{\partial t} V_{k,2}(t,v) &= (\delta + \mu_{k+1}(t-v)) V_{k,2}(t,v) - \mu_{k+1}(t-v) S_K, \quad k = K-1.
\end{aligned}$$

Todista näistä jälkimmäinen.

3. Olkoon $t \geq 0$ ja

$$\Gamma(t) = P - S_K \int_0^t e^{-\delta s} dN_{K-1,K}(s) - e^{-\delta t} V(t)$$

hetkeen t mennessä kertyneen ylijäämän nykyarvo. Tällöin kaikilla $t \in [0,n]$,

$$\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{K-2} \int_0^t e^{-\delta s} (V_k(s,T_k) - V_{k+1}(s,s)) dM_{k,k+1}(s) + \int_0^t e^{-\delta s} (V_{K-1}(s,T_{K-1}) - S_K) dM_{K-1,K}(s).$$

Todista tästä väitteestä seuraava osa: jos ω on sellainen, että $T_1 \leq n$, niin

$$\Gamma'(t) = e^{-\delta t}\mu_1(t-T_0)\left[V_{1,1}(t,t) - V_{0,1}(t,T_0)\right], \quad \forall t \in (0,T_1),$$

ja

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{-\delta s}\left[V_{0,1}(s,T_0) - V_{1,1}(s,s)\right] dM_{0,1}(s), \quad \forall t \in [0,T_1].$$

4. Olkoon $0 \leq h < k \leq K-2$. Osoita, että $\forall t \in [0,n]$,

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^t e^{-\delta s}(V_h(s,T_h) - V_{h+1}(s,s))dM_{h,h+1}(s), \int_0^t e^{-\delta s}(V_k(s,T_k) - V_{k+1}(s,s))dM_{k,k+1}(s)\right) = 0.$$

5. Olkoon $0 \leq k \leq K-2$. Osoita, että

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t e^{-\delta s}(V_k(s,T_k) - V_{k+1}(s,s))dM_{k,k+1}(s)\right)^2\right) \\ = & \int_0^t e^{-2\delta s}\mathbb{E}\left((V_k(s,T_k) - V_{k+1}(s,s))^2\mu_{k+1}(s-T_k)\mathbb{1}(Z(s)=k)\right) ds. \end{aligned}$$

Muotoile tuloksen ja tehtävän 4 avulla esitys $\Gamma(t)$:n varianssille.