Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 3, 13.4.2015

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyyskenttä, $\tau_0 \equiv 0$ ja $\tau_k : \Omega \to (0, \infty) \cup \{+\infty\}$ satunnaismuuttujia, $k = 1, 2, \ldots$. Toisin sanoen $\tau_k^{-1}(+\infty) \in \mathcal{F}$ ja $\tau_k^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$ ja $k \in \mathbb{N}$, missä $\mathcal{B}$ tarkoittaa $\mathbb{R}$:n Borel-joukkoja. Olkoon $T_0 = 0$ sekä

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} \tau_j \quad \text{ja} \quad Z(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_j \le t), \quad k \in \mathbb{N},\ t \ge 0,$$

ja olkoon $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ja $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Z(s) \,|\, s \le t\right)$. Oletetaan, että $\lim_{k\to\infty} T_k(\omega) = +\infty$, $\forall \omega$.

1. Määritellään joukkoluokka $\mathcal{G}_t$ seuraavasti: $B \in \mathcal{G}_t$, jos ja vain jos seuraavat ehdot a ja b on täytetty:

a) $B \cap \{Z(t) = 0\} = \{Z(t) = 0\}$ tai $B \cap \{Z(t) = 0\} = \emptyset$,

b) $B \cap \{Z(t) = m\} = \{(T_1, \ldots, T_m) \in B_m, T_{m+1} > t\}$ eräälle $B_m \in \mathcal{B}^m \cap (0, t]^m$,

kaikilla $m \in \mathbb{N}$, missä $\mathcal{B}^m$ tarkoittaa $\mathbb{R}^m$:n Borel-joukkoja. Osoita, että $\mathcal{G}_t$ on sigma-algebra.

2. Osoita, että $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.

3. Olkoon $t \ge 0$ kiinteä ja $U_j = T_j \mathbb{1}(T_j \le t)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Osoita, että

a) U_j on $\mathcal{F}_t$-mitallinen.
b) $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$.

4. Olkoon $K \in \mathbb{N}$ kiinteä. Oletetaan lisäksi, että $\tau_1, \ldots, \tau_K$ ovat riippumattomia $(0, \infty)$-arvoisia satunnaismuuttujia ja että $\tau_{K+1} \equiv +\infty$. Olkoon

$$\mathbb{P}(\tau_j > x) = e^{-\int_0^x \mu_j(s) ds}, \quad x \ge 0,\ j = 1, \ldots, K,$$

missä funktiot μ_j ovat ei-negatiivisia ja jatkuvia, ja olkoon F_j muuttujan τ_j kertymäfunktio. Määritellään prosessit $N_{k,k+1}$ ja $\Lambda_{k,k+1}$ ehdoista

$$\begin{aligned} N_{k,k+1}(t) &= \sum_{0 \le s \le t} \mathbb{1}(Z(s) = k+1, Z(s-) = k), \\ \Lambda_{k,k+1}(t) &= \int_0^t \mu_{k+1}(s - \eta(s))\, \mathbb{1}(Z(s) = k)\, ds, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \ldots, K-1$, $t \ge 0$, missä

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{K} T_j \mathbb{1}(T_j \le t < T_{j+1}).$$

Olkoon $0 \le s \le t$ ja $B \in \mathcal{F}_s$. Tällöin kaikilla $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $k \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\mathbb{1}(B \cap \{Z(s) = m\})(N_{k,k+1}(t) - N_{k,k+1}(s))\right) \\ = \ & \mathbb{E}\left(\mathbb{1}(B \cap \{Z(s) = m\})(\Lambda_{k,k+1}(t) - \Lambda_{k,k+1}(s))\right). \end{aligned}$$

Todista tulos, kun $1 \le m \le k \le K-1$.

5. (jatkoa tehtävään 4) Osoita, että $\Lambda_{k,k+1}$ on prosessin $N_{k,k+1}$ kompensaattori jokaisella $k \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$.