Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 2, 23.3.2015

Olkoot τ, τ_1 ja τ_2 todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ määriteltyjä riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\tau(\omega), \tau_1(\omega), \tau_2(\omega) \in \{1, 2, \ldots\}$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Merkitään

$$p_k = \mathbb{P}(\tau = k) \quad \text{ja} \quad \bar{P}(k) = \sum_{m=k}^{\infty} p_m, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Oletetaan, että $\bar{P}(k) > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään kahden hypyn prosessi

$$N = \{N(n)\,;\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

ehdoista $N(0) = 0$ ja

$$N(n) = \mathbb{1}(\tau_1 \leq n) + \mathbb{1}(\tau_1 + \tau_2 \leq n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Olkoon $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\Lambda(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \sigma\left(N(1), \ldots, N(n)\right), \\
\lambda(n) &= \mathbb{E}(N(n) - N(n-1) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}), \\
\Lambda(n) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda(j),
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Tällöin Λ on N:n kompensaattori sigma-algebrajonon $(\mathcal{F}_n)$ suhteen,

1. Osoita vastaesimerkin avulla, että N:llä ei ole yleisesti Markov-ominaisuutta eli että voi olla

$$\mathbb{P}(N(n) = k | N(n-1) = j_{n-1}) \neq \mathbb{P}(N(n) = k | N(n-1) = j_{n-1}, \ldots, N(n-r) = j_{n-r}).$$

2. Olkoon

$$C_{jk}(n) = \{\tau_1 = j, \tau_1 + \tau_2 = k\}, \quad j = 1, \ldots, n-1,\ j < k \leq n,$$
$$D_j(n) = \{\tau_1 = j, \tau_1 + \tau_2 > n\}, \quad j \leq n,$$

ja $E(n) = \{\tau_1 > n\}$ sekä $\mathcal{G}_n$ näiden generoima sigma-algebra. Osoita, että $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$.

3. Olkoon $B \in \mathcal{F}_{n-1}$. Osoita, että edellisen tehtävän generoiville joukoille pätee

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}(B)(N(n) - N(n-1))) = \begin{cases} 0, & \text{jos } B = C_{jk}(n-1),\ j \leq n-2,\ j < k \leq n-1, \\ p_j p_{n-j}, & \text{jos } B = D_j(n-1),\ j \leq n-1, \\ p_n, & \text{jos } B = E(n-1). \end{cases}$$

4. Osoita, että

$$\lambda(n) = \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{n-j}}{\bar{P}(n-j)} \mathbb{1}(\tau_1 = j) + \frac{p_n}{\bar{P}(n)} \mathbb{1}(\tau_1 \geq n)\right] \mathbb{1}(\tau_1 + \tau_2 \geq n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Osoita, että

$$\Lambda(n) = \sum_{m=\tau_1+1}^{\min(\tau_1+\tau_2, n)} \frac{p_{m-\tau_1}}{\bar{P}(m-\tau_1)} + \sum_{m=1}^{\min(\tau_1, n)} \frac{p_m}{\bar{P}(m)},$$

missä tyhjä summa sovitaan nollaksi.