Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 1, 23.2.2015

1. Oletetaan tunnetuksi Jensenin epäyhtälö: jos ξ on integroituva satunnaismuuttuja ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi funktio, niin

$$\mathbb{E}(f(\xi)) \geq f(\mathbb{E}(\xi)).$$

Olkoon $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvava cadlag-funktio ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksi funktio. Olkoon $\alpha = g(b) - g(a) > 0$. Osoita, että

$$\int_a^b f(t)dg(t) \geq \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\int_a^b t dg(t)\right).$$

2. (jatkoa) Esitä esimerkki edellisen tehtävän ehdot täyttävistä funktioista f ja g, joille

$$\int_a^b f(t)dg(t) < f\left(\int_a^b t dg(t)\right).$$

3. Olkoot $g, g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvavia cadlag-funktioita, $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että jono $(g_n(s))$ on kasvava ja että $\lim_{n\to\infty} g_n(s) = g(s)$ kaikilla $s \in [a, b]$. Osoita, että myös jono $(g_n(s-))$ on kasvava ja että $\lim_{n\to\infty} g_n(s-) = g(s-)$ kaikilla $s \in [a, b]$.

4. (jatkoa) Olkoot $g, g_1, g_2, \ldots$ kuten edellisessä tehtävässä ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)dg_n(t) = \int_a^b f(t)dg(t).$$

5. Olkoon funktio $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvava ja jatkuva. Oletetaan, että $g(a) = 0$ ja että g on jatkuvasti derivoituva välillä (a, b). Etsittävä sellainen funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, että

$$f(t) = \int_a^t f(s)dg(s) + 1, \quad \forall t \in (a, b).$$