2.3.1 Sovellus usean henkilön vakuutuksiin

Tarkastellaan kahden henkilön kuolemanvaravakuutusta, jossa vakuutettu 1 on x_1-ikäinen ja vakuutettu 2 x_2-ikäinen. Vakuutetun j kuolevuus olkoon μ_j. Tämä tulkitaan vastasyntyneen kuolevuudeksi. Olkoon $T_j = T_j(x_j)$ vakuutetun j jäljellä oleva elinaika. Tällöin siis

$$\mathbb{P}(T_j \le t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu_j(x_j + s)\,ds}, \quad j = 1, 2.$$

Oletetaan, että μ_1 ja μ_2 ovat jatkuvia ja että T_1 ja T_2 ovat riippumattomia.

Tarkastellaan vakuutusta, jossa korvaus on S_1, jos vakuutettu 1 kuolee ennen vakuutettua 2 ja $T_1 \le n$, ja korvaus on S_2, jos vakuutettu 2 kuolee ennen vakuutettua 1 ja $T_2 \le n$.

Olkoon korkointensiteetti f jatkuva ja

$$D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

kuten aiemminkin. Pyritään määräämään vakuutuksen nettokertamaksu P.

Jos $S_1 = S_2$, voidaan käyttää henkivakuutusmatematiikan kurssin seurausta 4.2:

$$P = S_1 \, A^{\;\;2}_{x_1 x_2 : \overline{n}|}(K)$$

$$= S_1 \, A_{x_1 x_2 : \overline{n}|}(K)$$

$$= S_1 \int_0^n e^{-D(t)} \, e^{-\int_0^t (\mu_1(x_1+s) + \mu_2(x_2+s))\,ds}$$

$$\cdot (\mu_1(x_1+t) + \mu_2(x_2+t))\,dt.$$

Tarkastellaan seuraavassa yleistä tapausta Markov-prosessien näkökulmasta. Olkoon

$$Z(t) = (1(T_1 \le t), 1(T_2 \le t)), \quad t \ge 0.$$

Korvaus S_1 maksetaan hetkellä $t \in [0,n]$, jos

$$Z(t-) = (0,0) \text{ ja } Z(t) = (1,0),$$

ja korvaus S_2, jos

$$Z(t-) = (0,0) \text{ ja } Z(t) = (0,1).$$

Olkoot

$$N_{(0,0),(1,0)}(t) = \sum_{s \le t} 1(Z(s) = (1,0), Z(s-) = (0,0))$$

ja

$$N_{(0,0),(0,1)}(t) = \sum_{s \le t} 1(Z(s) = (0,1), Z(s-) = (0,0)).$$

Tällöin korvausten nykyarvo on

$$S_1 \int_0^n e^{-\delta(t)} dN_{(0,0),(1,0)}(t) + S_2 \int_0^n e^{-\delta(t)} dN_{(0,0),(0,1)}(t).$$

Olkoon

$$E = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

prosessin Z tila-avaruus. Oletetaan siis, että

$$Z(0) = (0,0).$$

Merkitään vielä $Z_j(t) = 1(T_j \le t)$, jolloin

$$Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t)).$$

Ilman oleellista rajoitusta voidaan olettaa, että $T_1(\omega), T_2(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$.

a) Osoitetaan, että $\{Z(t) \mid t \geq 0\}$ on Markov-prosessi sisäisen historian $(\mathcal{F}_t)$ suhteen,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Z(s) ; s \leq t)$$

$$= \sigma(Z_1(s), Z_2(s) \mid s \leq t).$$

Olkoon

$$\mathcal{F}_t^{(j)} = \sigma(Z_j(s) ; s \leq t), \quad j = 1, 2.$$

Tällöin itse asiassa

$$\mathcal{F}_t^{(j)} = \sigma(T_j 1(T_j \leq t)).$$

Nimittäin

$$\{Z_j(s) = 1\} = \{T_j 1(T_j \leq t) \in (0, s]\}, \quad \forall s \leq t,$$

joten $\mathcal{F}_t^{(j)} \subseteq \sigma(T_j 1(T_j \leq t))$. Jos $a \in [0, t]$, niin

$$\{T_j 1(T_j \leq t) \leq a\} = \{T_j \leq a\} \cup \{T_j > t\} \in \mathcal{F}_t^{(j)}.$$

Jos $a < 0$ tai $a > t$, niin triviaalisti

$$\{T_j 1(T_j \leq t) \leq a\} \in \mathcal{F}_t^{(j)}.$$

Siis

$$\sigma(T_j 1(T_j \leq t)) \subseteq \mathcal{F}_t^{(j)}.$$

Lisäksi

$$\mathcal{F}_t = \sigma(T_1 1(T_1 \leq t), T_2 1(T_2 \leq t)).$$

Koska T_1 ja T_2 ovat riippumattomia, niin

$$\mathbb{E}\left(f_1(T_1 1(T_1 \leq t)) f_2(T_2 1(T_2 \leq t)) \mid \mathcal{F}_s \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(f_1(T_1 1(T_1 \leq t)) \mid \mathcal{F}_s^{(1)} \right) \mathbb{E}\left(f_2(T_2 1(T_2 \leq t)) \mid \mathcal{F}_s^{(2)} \right) \quad \text{m.v.}$$

kaikilla Borel-mitallisilla funktioilla f_1, f_2. Koska $\{Z_1(t)\}$ ja $\{Z_2(t)\}$ ovat Markov-prosesseja, niin

$$\mathbb{P}\left(Z(t) = (j_1, j_2) \mid \mathcal{F}_s \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(1(Z_1(t) = j_1) 1(Z_2(t) = j_2) \mid \mathcal{F}_s \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(1(Z_1(t) = j_1) \mid \mathcal{F}_s^{(1)} \right) \mathbb{E}\left(1(Z_2(t) = j_2) \mid \mathcal{F}_s^{(2)} \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(1(Z_1(t) = j_1) \mid \sigma(Z_1(s)) \right) \mathbb{E}\left(1(Z_2(t) = j_2) \mid \sigma(Z_2(s)) \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(1(Z_1(t) = j_1) 1(Z_2(t) = j_2) \mid \sigma(Z_1(s), Z_2(s)) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z(t) = (j_1, j_2) \mid \sigma(Z(s)) \right).$$

Siis $\{Z(t)\}$ on Markov-prosessi.

b) Nettokertamaksun määrääminen.

Kohdan a nojalla voidaan soveltaa seuraustä 2.4. Siirtymäintensiteetit voidaan määrätä kilpailevien kuolinsyiden teorian tapaan. Saadaan

$$\mu_{(0,0),(1,0)}(t) = \mu_1(x_1+t),$$

$$\mu_{(0,0),(0,1)}(t) = \mu_2(x_2+t),$$

$$\mu_{(1,0),(1,1)}(t) = \mu_2(x_2+t),$$

$$\mu_{(0,1),(1,1)}(t) = \mu_1(x_1+t).$$

Muut intensiteetit ovat nollia. Siis

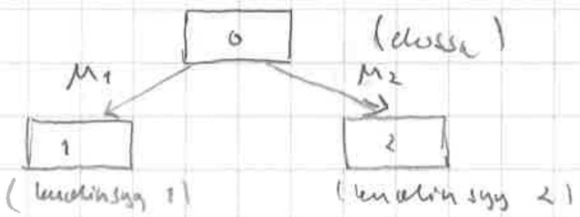
$$P = S_1 \int_0^n e^{-D(t)} \, \mathbb{P}(Z(t) = (0,0) \mid Z(0) = (0,0)) \, \mu_1(x_1+t) \, dt$$
$$+ S_2 \int_0^n e^{-D(t)} \, \mathbb{P}(Z(t) = (0,0) \mid Z(0) = (0,0)) \, \mu_2(x_2+t) \, dt$$

$$= S_1 \int_0^n e^{-D(t)} \, e^{-\int_0^t (\mu_1(x_1+s) + \mu_2(x_2+s)) ds} \, \mu_1(x_1+t) \, dt$$
$$+ S_2 \int_0^n e^{-D(t)} \, e^{-\int_0^t (\mu_1(x_1+s) + \mu_2(x_2+s)) ds} \, \mu_2(x_2+t) \, dt.$$

2.4. Nelson-Aalen estimaattori kuolevuudelle

Tarkastellaan r hengen homogeenista henkilöryhmää. Oletetaan, että henkilöt ovat samanikäisiä, samaa sukupuolta jne. siten, että on perusteltua katsoa jäljellä olevat elinajat samoin jakautuneiksi (kuolinsyittäin). Elinajat oletetaan myös riippumattomiksi (henkilöiden välillä).

Oletetaan, että kuolinsyitä on kaksi. Pyritään estimoimaan näitä samasta aineistosta.



Estimoidaan kuolevuuksia μ_1 ja μ_2 seuraamalla ryhmää n vuotta. Yhtäpitävää on estimoida 'kumulatiivista intensiteettiä'

$$R_k(t) = \int_0^t \mu_k(s)\,ds, \quad k = 1, 2.$$

Tähän on esitetty useita tapoja (esim. suurimman uskottavuuden menetelmä, χ^2-minimimenetelmä jne.). Ongelman luonteen takia perusteltua on myös nojautua jatkuva-aikaiseen mallintarkasteluun. Tätä käsitellään seuraavassa.

Yleisenä oletuksena on, että kuolinsyy on hyvin määritelty ts. syitä on tasan yksi. Lisäksi kuolintapahtumia voi sattua vain yksi annetulla hetkellä (tämä seuraa mm. elinaikojen riippumattomuudesta). Olkoon T_j henkilön j jäljellä oleva elinaika.

Henkilön j tilaa kuvataan Markov-prosessilla Z_j,

$$Z_j(t) = \sum_{k=1}^{2} 1(T_j \le t, \text{kuolinsyy} = k)\cdot k.$$

Kuolevuuden μ_k estimoinnissa luonnollinen tarkasteltavaksi laskuriprosessiksi on N_{jk},

$$N_{jk}(t) = 1(T_j \le t, \text{kuolinsyy} = k).$$

Henkilö on 'riskillä' kuolla syyhyn k, jos $T_j > t$. Havaintoa syyhyn 1 liittyvästi kuolinhetkestä ei saada, jos henkilö on kuollut syyhyn 2 (havaitaan kyllä, että kyseinen kuolinhetki on vähintään T_j)*. Merkitään

$$Y_j(t) = 1(T_j \ge t).$$

Asetelma on olennaisesti ottaen sama kuin kohdassa 2.1. Erityisesti N_{jk}:n kompensaattori on

$$\Lambda_{jk}(t) = \int_0^t \mu_k(s) Y_j(s)\,ds.$$

Jos $M_{jk} = N_{jk} - \Lambda_{jk}$, niin $\langle M_{jk}\rangle = \Lambda_{jk}$ ja $[M_{jk}] = N_{jk}$.

* Taustalla on ajateltu kilpailevien kuolinsyiden teorian mukaiset hypoteettiset elinajat.

Koko ryhmää kuvaavat laskuriprosessit

$$N_k(t) = \sum_{j=1}^{r} N_{jk}(t), \quad k = 1,2.$$

ja 'riskillä' olevien lukumäärä on

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{r} Y_j(t).$$

Olkoon $\Lambda_k(t) = \sum_{j=1}^{r} \Lambda_{jk}(t)$ ja $M_k(t) = \sum_{j=1}^{r} M_{jk}(t)$.

Tällöin Λ_k on N_k:n kompensaattori ja $\langle M_k \rangle = \Lambda_k$, $[M_k] = N_k$.
Tässä $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_j(s), s \le t, j = 1, \dots, r)$.

Intensiteetin estimoinnissa luonnollista on suhteuttaa kuolintapaukset riskiin Y. Voi kuitenkin olla $Y(t) = 0$, mikä aiheuttaa joitain vaikeita ongelmia. Määritellään prosessi H ehdosta

$$H(t) = \begin{cases} \frac{1}{Y(t)}, & \text{jos } Y(t) > 0 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Kirjoitetaan edelleen

$$\begin{cases} \hat{R}_k(t) = \int_0^t H(s)\, dN_k(s), \\ R_k^*(t) = \int_0^t \mu_k(s)\, 1(Y(s) > 0)\, ds. \end{cases}$$

Ilmeisesti

$$(2.9) \quad \hat{R}_k(t) = R_k^*(t) + \int_0^t H(s)\, dM_k(s).$$

Edellä esitelty $\hat{R}_k$ on Nelson-Aalen estimaattori μ_k:lle alueessa $t \in [0, r]$. Jos otoskoko r on suuri, on $Y(t) > 0$ suurella todennäköisyydellä. Jos näin on, niin $R_k^*(t)$ juuri $R_k(t)$. Toisaalta integraali (2.9):stä on martingaali (Lemma 1.2), johon suhtaudutaan 'kohinana'.

Estimaattori on jonkin verran harhainen, koska voi olla $Y(t) = 0$. Asymptoottisissa tarkasteluissa harha kuitenkin katoaa $(r \to \infty)$.

Virhetarkasteluja silmällä pitäen on luonnollista tarkastella estimaattorin varianssia, koska R_k^* on (asymptoottisesti) lähes deterministinen, keskitytään integraaliin (2.9):stä. Tämän varianssi on (kiinteällä hetkellä t)

$$\sigma_k^2(t) = \mathbb{E}\left(\left\langle \int_0^t H(s)\, dM_k(s) \right\rangle\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 1.4}}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^t H(s)^2\, d\left(\langle M_k\rangle(s)\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^t H(s)^2 \mu_k(s) Y(s)\, ds\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^t H(s) \mu_k(s)\, ds\right)$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}(H(s))\, \mu_k(s)\, ds.$$

Varianssin estimaattoriksi sopii

$$\hat{\sigma}_k^2(t) = \int_0^t H(s)^2 \, dN_k(s) .$$

Tämän odotusarvo on

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H(s)^2 \, d\Lambda_k(s) \right) = \int_0^t \mathbb{E}(H(s)) \mu_k(s) \, ds .$$

Siis $\hat{\sigma}_k^2(t)$ on $\sigma_k^2(t)$:n harhaton estimaattori.

Olkoon $R = (R_1, R_2)$ ja $\hat{R} = (\hat{R}_1, \hat{R}_2)$.
Voidaan osoittaa, että r:n kasvaessa

$$\sqrt{r} \, (\hat{R} - R)$$

suppenee kohti ei-stä Gaussista martingaalia ($\hat{R}$ riippumattomasti r:stä). Tämä vastaa keskeistä raja-arvolausetta 'tavallisissa' rajatarkasteluissa. Tarkemmin,

$$\sqrt{r} \, (\hat{R} - R) \xrightarrow{d} (U_1, U_2),$$

missä U_1 ja U_2 ovat riippumattomia Gaussisia martingaaleja ja $\forall \; 0 \le t \le u$, $k = 1, 2$,

$$\mathbb{E}(U_k(t)) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(U_k(t), U_k(u)) = \int_t^u \frac{\mu_k(s)}{\mathbb{P}(Z(s) = 0)} \, ds$$

(Z on yleinen Markov-prosessi, joka kuvaa yksilön tilaa ts. jakaumamielessä kopio prosesseista $Z_1, Z_2, \ldots$).

Lähdeluettelo

Kohta 1.1.

[1] Bartle (1964). The elements of real analysis. Wiley.

Kohta 1.2.

[2] Bremaud (1981). Point processes and queues. Springer.

Kohdat 2.1 ja 2.4.

[3] Andersen, Borgan, Gill, Keiding (1993). Statistical models based on counting processes. Springer.

Kohta 2.2.

[4] Ramlau-Hansen (1988): Hattendorff's theorem: a Markov chain and counting process approach. Scand. Actuarial J., 143-156.

Kohta 2.3

[5] Norberg (1991): Reserves in life and pension insurance. Scand. Actuarial J., 3-24.

Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssi, sisällysluettelo