2. Sovelluksia

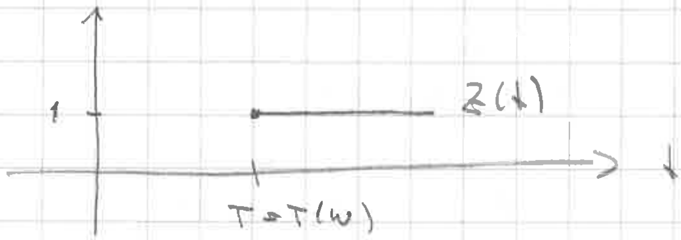
Henkivakuutuksessa on usein luonnollista tarkastella tapahtumia jatkuva-aikaisesti. Kuolemanvaravakuutukset ja vakuutetun tilaan sidotut korvaukset ovat tästä esimerkkejä. Vakuutusten hinnoittelussa ollaan kiinnostuneita odotusarvoista. Riskillisyyden hallitsemisessa taas varianssi on suosittu mittari. Edellä esitetty teoria tukee tällaisia tarkasteluja.

Seuraavassa esitetään osin esimerkinomaisesti teorian soveltamista kolmeen kohteeseen: ylijäämän varianssin määräämiseen, mutkikkaiden vakuutusten hinnoitteluun ja kuolevuuden estimoimiseen.

2.1. Jäljellä olevan elinajan kuvaamisesta

Olkoon T jäljellä oleva elinaika ja μ vastaava kuolevuus. Oletetaan, että μ on jatkuva funktio. Vakuutetun tila $Z(t)$ hetkellä t määritellään ehdosta

$$(2.1) \qquad Z(t) = 1(T \leq t).$$



Ilmeisesti prosessin $\{Z(t) \mid t \geq 0\}$ polut ovat kasvavia ja oikealta jatkuvia. Lisäksi $\{Z(t)\}$ on Markov-prosessi. Seuraavissa tarkasteluissa

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Z(s);\ s \leq t).$$

Tarkastelut rajoitetaan äärelliselle välille $t \in [0, n]$.

Selvästi $\{Z(t)\}$ on kasvava prosessi ja tasaisesti rajoitettu. Siis $\{Z(t)\}$ on alimartingaali.

<u>Lause 2.1.</u> Prosessin (2.1) kompensaattori on

(2.2) $$\Lambda(t) = \int_0^t \mu(s)\, 1(T \geq s)\, ds, \quad t \in [0,n].$$

Olkoon

$$M(t) = Z(t) - \Lambda(t), \quad t \in [0,n],$$

kompensoitu prosessi. Silloin

(2.3) $$\langle M \rangle = \Lambda$$

ja

(2.4) $$[M] = Z.$$

<u>Todistus.</u> Kompensaattorin muoto (2.2) on erikoistapaus myöhemmin esitettävästä yleisemmästä Markov-prosesseja koskevasta tuloksesta. Osoitetaan kuitenkin täsmällisesti, että $\{Z(t)\}$ on Markov-prosessi.

On siis näytettävä, että

$$\mathbb{P}(Z(t) = j \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(Z(t) = j \mid \sigma(Z(s))), \quad s \leq t, \; j = 0,1.$$

Nyt

$$\mathbb{P}(Z(t) = j \mid \sigma(Z(s))) = \mathbb{E}(1(Z(t) = j) \mid \sigma(Z(s))) = \xi,$$

$$\xi = \frac{\mathbb{P}(Z(t) = j,\, Z(s) = 0)}{\mathbb{P}(Z(s) = 0)}\, 1(Z(s) = 0) + \frac{\mathbb{P}(Z(t) = j,\, Z(s) = 1)}{\mathbb{P}(Z(s) = 1)}\, 1(Z(s) = 1).$$

Olkoon $B \in \mathcal{F}_s$. On osoitettava, että

(2.4.1) $\mathbb{E}(1(B)\, 1(Z(t)=j)) = \mathbb{E}(1(B)\, \xi)$.

Merkitään

$$\mathcal{G}_s = \{A \cup \{T > s\};\ A \in \mathcal{F}_s\} \cup \{A \cap \{T \le s\};\ A \in \mathcal{F}_s\}.$$

Koska $\{T \le s\} \in \mathcal{F}_s$, niin $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{F}_s$. Lisäksi $\mathcal{G}_s$ on σ-algebra ja $Z(u)$ on $\mathcal{G}_s$-mitallinen, $\forall\, u \le s$. Siis $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_s$. Nähdään, että

$$B \cap \{T > s\} = \emptyset \text{ tai } \{T > s\}.$$

Olkoon $B \cap \{T > s\} = \{T > s\}$. Koska $\{T > s\} = \{Z(s) = 0\}$, niin

$$\mathbb{E}(1(B)\, \xi) = \mathbb{E}(1(T > s)\, \xi) + \mathbb{E}(1(B \cap \{T \le s\})\, \xi)$$

$$= \mathbb{P}(Z(t) = j,\ Z(s) = 0) + \frac{\mathbb{P}(Z(t) = j,\ Z(s) = 1)}{\mathbb{P}(Z(s) = 1)}\, \mathbb{P}(B \cap \{Z(s) = 1\})$$

ja

$$\mathbb{E}(1(B)\, 1(Z(t) = j)) = \mathbb{P}(Z(t) = j,\ Z(s) = 0)$$
$$+ \mathbb{P}(\{Z(t) = j\} \cap B \cap \{Z(s) = 1\}).$$

Jos $j = 0$, niin molemmat odotusarvot ovat

$$= \mathbb{P}(Z(t) = 0,\ Z(s) = 0),$$

ja jos $j = 1$, niin molemmat ovat

$$\mathbb{P}(Z(t) = 1,\ Z(s) = 0) + \mathbb{P}(B \cap \{Z(s) = 1\}).$$

olkoon $B \cap \{T > s\} = \emptyset$. Tällöin

$$\mathbb{E}(1(B)\,\xi) = \frac{\mathbb{P}(Z(t)=j,\, Z(s)=1)}{\mathbb{P}(Z(s)=1)}\,\mathbb{P}(B \cap \{Z(s)=1\})$$

ja

$$\mathbb{E}(1(B)\,1(Z(t)=j)) = \mathbb{P}(\{Z(t)=j\} \cap B \cap \{Z(s)=1\}).$$

Jos $j=0$, molemmat odotusarvot ovat nollia ja jos $j=1$, niin molemmat ovat

$$= \mathbb{P}(B \cap \{Z(s)=1\}).$$

On vielä todistettava (2.3) ja (2.4).

Ilmeisesti M:llä ja Z:lla on samat hypyt. Näitä on nolla tai yksi kappaletta ja mahdollisen hypyn suuruus on yksi. Lemman 1.1 nojalla

$$[M] = [Z] = Z.$$

Saman lemman ja lemman 1.2 nojalla

$$[M] = M^2 + \text{martingaali}.$$

Nähdään, että $\langle M \rangle$ on $[M]$:n (eli Z:n) kompensaattori ja että $\langle M \rangle = \Lambda$. $\square$

2.2. Hattendorfin lause kuolemanvaravakuutukselle

Tarkastellaan kuolemanvaravakuutusta, jossa vakuutusaika on n vuotta ja kuolemanvarasumma $S(t)$, jos $T = t$ eli jos vakuutettu kuolee hetkellä $t \in [0, n]$. Vakuutettu olkoon x-ikäinen. Olkoon edelleen korkointensiteetti δ ja kuolevuus μ. Oletetaan, että S, δ ja μ ovat jatkuvia funktioita. Merkitään

$$D(t) = \int_0^t \delta(s)\, ds.$$

Vakuutusmaksua maksetaan intensiteetillä $\bar{P}(t)$ hetkellä $t \in [0, n]$. Oletetaan, että $\bar{P}$ on jatkuva ja ekvivalenssiperiaatteen mukainen.

Olkoon prosessi $\{Z(t)\}$ kuten kohdassa 2.1. Kuolevuus μ tarkoittaa seuraavassa x-ikäisen kuolevuutta. (siis $\mu(s)$ on $(x+s)$-ikäisen kuolevuus).

Tarkastellaan edellä esitettyyn kuolemanvaravakuutukseen liittyvää satunnaisylijäämää. Olkoon $V_{Z(t)}(t)$ vastuuvelka hetkellä $t \in [0,n]$. Tällöin $V_1(t) = 0$ ja $V_0(t)$ on 'tavallinen' kuolemanvaravakuutuksen vastuuvelka. Olkoon edelleen M ja Λ kuten Lauseessa 2.1.

Hetkeen $t \in [0,n]$ mennessä kertyneen ylijäämän nykyarvo $\Pi(t)$ on (määritelmä)

$$\Pi(t) = \int_0^t e^{-D(s)} \beta(s)\, 1(Z(s)=0)\, ds - \int_0^t e^{-D(s)} S(s)\, dZ(s) - e^{-D(t)} V_{Z(t)}(t).$$

Integraali Z:n suhteen kuvaa korvauksia ja on

$$\begin{cases} e^{-D(T)} S(T), & \text{jos } T \le t \\ 0, & \text{jos } T > t. \end{cases}$$

Ensimmäinen integraali on maksujen nykyarvo. Lisäksi yhtiön on varattava vastuuvelkaa vastaava määrä tulevaisuuden suorituksille.

Jos $0 \le t < u \le n$, niin välillä $(t,u]$ syntyy ylijäämää määrä

$$\Pi(u) - \Pi(t) = \int_t^u e^{-D(s)} \beta(s)\, 1(Z(s)=0)\, ds - \int_t^u e^{-D(s)} S(s)\, dZ(s) + e^{-D(t)} V_{Z(t)}(t) - e^{-D(u)} V_{Z(u)}(u),$$

Suoritusten lisäksi siis ylijäämäksi kirjataan vastuuvelan väheneminen (sopivasti diskontattuna).

Lause 2.2. Ylijäämäprosessi $\{\Gamma(t)\}$ on martingaali. Odotusarvo on nolla ja

$$(2.5)\quad \mathrm{Var}\,(\Gamma(u)-\Gamma(t)) = \int_t^u e^{-2D(s)}(S(s)-V_0(s))^2\,\mu(s)\,{}_sp_x\,ds,$$

$\forall\ 0 \le t < u \le n$. Erityisesti

$$(2.6)\quad \mathrm{Var}\,\Gamma(u) = \mathrm{Var}\,\Gamma(t) + \mathrm{Var}(\Gamma(u)-\Gamma(t)).$$

Todistus. Vastuuvelka $\{V_0(t)\}$ toteuttaa Thielen yhtälön

$$V_0'(t) = (\mu(t)+\delta(t))V_0(t) - \mu(t)S(t) + \bar{P}(t).$$

Siis maksuja koskeva osa Γ:n määritelmässä on

$$\int_0^t e^{-D(s)}\,(V_0'(s) - \delta(s)V_0(s))\,1(Z(s)=0)\,ds$$

$$+\int_0^t e^{-D(s)}\mu(s)\,(S(s)-V_0(s))\,1(Z(s)=0)\,ds$$

$$= e^{-D(t)}V_{Z(t)}(t) + \int_0^t e^{-D(s)}V_0(s)\,dZ(s)$$

$$+\int_0^t e^{-D(s)}\mu(s)\,(S(s)-V_0(s))\,1(Z(s)=0)\,ds\,,$$

Saadaan

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{-D(s)}\,(V_0(s)-S(s))\,dZ(s)$$

$$+\int_0^t e^{-D(s)}\mu(s)\,(S(s)-V_0(s))\,1(Z(s)=0)\,ds$$

$$= \int_0^t e^{-D(s)}\,(V_0(s)-S(s))\,dM(s).$$

Nähdään, että Γ on martingaali ja $\Gamma(0)=0$.
Siis $\mathbb{E}(\Gamma(t))=0$, $\forall t\in[0,n]$ (lemma 1.2).

Lemman 1.4 nojalla

$$\mathrm{Var}\,\Gamma(t) = \mathbb{E}(\langle\Gamma\rangle(t))$$
$$= \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-2D(s)}(V_0(s)-S(s))^2\,d\langle M\rangle(s)\right).$$

Lauseen 2.1 nojalla

$$\mathrm{Var}\,\Gamma(t) = \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-2D(s)}(V_0(s)-S(s))^2\mu(s)\,\mathbb{1}(T\geq s)\,ds\right)$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t e^{-2D(s)}(V_0(s)-S(s))^2\mu(s)\;{}_sP_x\,ds.$$

Martingaalin lisäykset ovat korreloimattomia, joten (2.4) pätee. Tästä seuraa (2.5). $\square$

2.3. Yleisten vakuutussopimusten mallittelusta

Tyypillisesti korvaukset riippuvat vakuutetun tilasta: esimerkiksi eläkettä maksetaan työkyvyttömyysaikana. Samoin tilasta toiseen siirryttäessä voidaan maksaa kertakorvaus (esimerkiksi kuolintapaussumma). Lisäksi sopimukseen saattaa sisältyä määrähetkinä tapahtuvia kertasuorituksia kuten elämänvaravakuutuksessa.

Kaikki yllä esitetyt korvaustyypit ovat kuvattavissa Lebesgue-Stieltjes-integraaleina. Tällainen yhtenäinen esitys selkeyttää tarkastelua.

Tässä kappaleessa esitetään edellä mainitut korvaukset korvaustyypeittäin ja johdetaan esitys nettokertamaksulle. Korkokanta oletetaan kohdan 2.2 mukaiseksi. Vakuutetun tilaa kuvataan Markov-prosessilla $\{Z(t)\}$, jolla on vain äärellinen määrä mahdollisia tiloja. Olkoon μ_{jk} siirtymäintensiteetti tilasta j tilaan k. Nämä oletetaan jatkuviksi funktioiksi. Olkoon tila-avaruus E ja siirtymätodennäköisyydet $P_{jk}(t,u)$, $j,k \in E$, $0 \le t < u$. Alkutila olkoon j_0 ts. $Z(0) = j_0$.

1) Korvaukset, jos vakuutettu on annetussa tilassa j

Perustyyppeiksi voidaan katsoa seuraavat:

- korvausta maksetaan intensiteetillä $s_j(t)$, jos vakuutettu on tilassa j hetkellä t

- hetkellä t_r maksetaan summa $K_j(t_r)$, jos vakuutettu on tilassa j hetkellä t_r, $r=1,\dots,R$.

Ensiksi mainittu voidaan kuvata mitalla $A_j^{(1)}$, joka määräytyy ehdosta

$$A_j^{(1)}(t) = \int_0^t s_j(s)\,ds.$$

Korvausten nykyarvo on

$$\int_0^n e^{-D(t)}\, 1(Z(t)=j)\, dA_j^{(1)}(t)$$
$$= \int_0^n e^{-D(t)} s_j(t)\, 1(Z(t)=j)\, dt.$$

Jälkimmäinen voidaan kuvata mitalla $A_j^{(2)}$,

$$A_j^{(2)}(t) = \sum_r K_j(t_r)\, 1(t_r \le t).$$

Korvausten nykyarvo on

$$\int_0^n e^{-D(t)}\, 1(Z(t)=j)\, dA_j^{(2)}(t)$$
$$= \sum_r e^{-D(t_r)} K_j(t_r)\, 1(Z(t_r)=j).$$

Määrittelemällä

$$A_j(t) = A_j^{(1)}(t) + A_j^{(2)}(t)$$

saadaan nykyarvoksi kaikkiaan

$$\int_0^n e^{-D(t)} 1(Z(t)=j)\, dA_j(t).$$

Fubinin lauseen nojalla näiden pääoma-arvo on

$$k_j \doteq \int_0^n e^{-D(t)} P_{j_0 j}(0,t)\, dA_j(t).$$

Tämä hajoaa integraaliksi ja summaksi kuten korvausten nykyarvo.

2) Korvaukset siirryttäessä tilasta j tilaan k.

Siirryttäessä tilasta j tilaan $k \neq j$ hetkellä t maksetaan summa $S_{jk}(t)$. Olkoon

(2.6.1) $$N_{jk}(t) = \sum_{s \leq t} 1(Z(s)=k,\ Z(s-)=j).$$

Summattavia on äärellinen määrä m.v. (merkintä tulkitaan siten, että summataan yli pisteiden s joissa $Z(s)=k$, $Z(s-)=j$).

Korvausten nykyarvo on

(2.7) $$\int_0^n e^{-D(t)} S_{jk}(t)\, dN_{jk}(t).$$

Seuraavassa tarkasteltava sigma-algebraperhe on

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Z(s);\ s \leq t).$$

Lause 2.3. Prosessi $\{N_{jk}(t)\}$ on alimartingaali, jonka kompensaattori $\{\Lambda_{jk}(t)\}$ määräytyy ehdosta

$$\Lambda_{jk}(t) = \int_0^t 1(Z(s-)=j)\,\mu_{jk}(s)\,ds, \quad t \geq 0.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\{N_{jk}(t)\}$ on alimartingaali. Koska $\{N_{jk}(t)\}$ on kasvava, riittää näyttää, että

$$(2.7.1) \qquad \mathbb{E}(N_{jk}(t)) < \infty, \quad \forall t > 0.$$

Olkoon $R > 0$ sellainen, että

$$\mathbb{P}(\text{välillä } [s,u) \text{ vähintään } h \text{ hyppyä}) \leq R^h (u-s)^h$$

kaikilla $0 < s < u \leq t$ (kts. KV 2012, lemma 9.5). Jos $\Delta \in (0, R^{-1})$ on kiinteä, on

$$(2.7.2) \qquad \mathbb{E}(N_{jk}(s+\Delta) - N_{jk}(s)) \leq \sum_{h=1}^{\infty} h R^h \Delta^h < \infty.$$

Siis

$$\mathbb{E}(N_{jk}(t)) \leq \sum_{i,\, i\Delta \leq t} \left[\mathbb{E}(N_{jk}(i\Delta)) - \mathbb{E}(N_{jk}((i-1)\Delta))\right] < \infty.$$

Nähdään, että $\{N_{jk}(t)\}$ on alimartingaali.

Selvästi $\{\Lambda_{jk}(t)\}$ on kasvava ja jatkuva prosessi. Lisäksi

$$\Lambda_{jk}(t) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} 1(Z(t_i-)=j)\,\mu_{jk}(t_i),$$

missä $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ on välin $[0,s]$ tasavälinen jako. Nähdään, että $\Lambda_{jk}(t)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen (sillä

$$1(Z(t_i-)=j) = \lim_{u\to t_i-} 1(Z(u)=j) \quad).$$

On osoitettava, että

$$M_{jk}(t) = N_{jk}(t) - \Lambda_{jk}(t), \quad t \geq 0,$$

määrittelee martingaalin. Olkoon $0 \leq s < t$.
Osoitetaan ensin, että

$$(2.7.3) \quad \mathbb{E}(N_{jk}(t) \mid \mathcal{F}_s) = N_{jk}(s) + \sum_{m \in E} \int_s^t P_{mj}(s,u)\mu_{jk}(u)\,du \; 1(Z(s)=m)$$

m.v. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = s$ välin $[0,s]$ tasavälinen jako. Olkoon edelleen

$$N_{jk}^{(n)}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} 1(Z(t_i)=j,\ Z(t_{i+1})=k).$$

Tällöin

$$N_{jk}^{(n)}(s) \to N_{jk}(s) \quad \text{m.v., kun } n \to \infty,$$

joten $N_{jk}(s)$ on $\mathcal{F}_s$-mitallinen. Siis

$$\mathbb{E}(N_{jk}(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_{jk}(t) - N_{jk}(s) \mid \mathcal{F}_s) + N_{jk}(s).$$

Olkoon nyt $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ välin $[s,t]$ tasavälinen jako ja

$$R_{jk}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} 1(Z(t_i)=j,\ Z(t_{i+1})=k).$$

Tällöin $R_{jk}^{(n)} \to N_{jk}(t) - N_{jk}(s)$ m.v. ja

$$\mathbb{E}(R^{(n)}_{jk} \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(R^{(n)}_{jk} \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}) \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-2} 1(Z(t_i) = j, Z(t_{i+1}) = k)$$

$$+ 1(Z(t_{n-1}) = j)\, \mathbb{E}(1(Z(t_n) = k) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}) \Big| \mathcal{F}_s \Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-2} 1(Z(t_i) = j, Z(t_{i+1}) = k)$$

$$+ 1(Z(t_{n-1}) = j)\, P_{Z(t_{n-1}),k}(t_{n-1}, t_n) \Big| \mathcal{F}_s \Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-2} 1(Z(t_i) = j, Z(t_{i+1}) = k) \Big| \mathcal{F}_s \Big)$$

$$+ P_{Z(s),j}(s, t_{n-1})\, P_{jk}(t_{n-1}, t_n)$$

$$= \dots = \sum_{i=0}^{n-1} P_{Z(s),j}(s, t_i)\, P_{jk}(t_i, t_{i+1}) \quad \text{m.v.}$$

Sama laskelma antaa

$$\mathbb{E}(R^{(n)}_{jk} \mid \sigma(Z(s))) = \mathbb{E}(R^{(n)}_{jk} \mid \mathcal{F}_s).$$

Rajalla $n \to \infty$ saadaan

$$\mathbb{E}(N_{jk}(t) - N_{jk}(s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_{jk}(t) - N_{jk}(s) \mid Z(s))$$

(konvergenssi $R^{(n)}_{jk} \to N_{jk}(t) - N_{jk}(s)$ on dominoitu, sillä

$$R^{(n)}_{jk} \le \sum_{j \in E} N_{jk}(t) \Big).$$

Nyt

$$\mathbb{E}\left(N_{jk}(t) - N_{jk}(s) \mid Z(s) \right)$$

$$= \sum_{m \in E} \frac{\mathbb{E}\left((N_{jk}(t) - N_{jk}(s)) \, 1(Z(s)=m) \right)}{\mathbb{P}(Z(s)=m)} \, 1(Z(s)=m).$$

Olkoon $m \in E$ kiinteä ja

$$f_m(t) = \mathbb{E}\left((N_{jk}(t) - N_{jk}(s)) \, 1(Z(s)=m) \right).$$

Tällöin $(\Delta > 0, \Delta \to 0+)$

$$f_m(t+\Delta) - f_m(t)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(N_{jk}(t+\Delta) - N_{jk}(t) \right) 1(Z(s)=m) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}\left(N_{jk}(t+\Delta) - N_{jk}(t) = n, \, Z(s)=m \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z(t+\Delta)=k, \, Z(t)=j, \, Z(s)=m \right) + o(1)\Delta$$

$$= \mu_{jk}(t)\Delta \, P_{mj}(s,t) \, \mathbb{P}(Z(s)=m) + o(1)\Delta$$

(kts. Henkivakuutusmatematiikka 2012, lemma 9.5).

Tästä seuraa (2.7.3).

Osoitetaan seuraavaksi, että

(2.7.4) $\mathbb{E}(\Lambda_{jk}(t) \mid \mathcal{F}_s) = \Lambda_{jk}(s) + \sum_{m \in E} \int_s^t P_{mj}(s,u)\mu_{jk}(u)\,du\, 1(Z(s)=m)$

m.v. Olkoon

$$\Gamma_{jk}(t) = \int_0^t 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du, \quad t \geq 0.$$

Selvästi $\Gamma_{jk} = \Lambda_{jk}$ m.v. Nyt $\Gamma_{jk}(s)$ = $\mathcal{F}_s$-mitallinen, sillä

$$\Gamma_{jk}(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1(Z(t_i)=j)\mu_{jk}(t_i),$$

missä $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = s$ on välin $[0,s]$ tasavälinen jako. Siis

$$\mathbb{E}(\Gamma_{jk}(t) \mid \mathcal{F}_s) = \Gamma_{jk}(s) + \mathbb{E}\left(\int_s^t 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du \mid \mathcal{F}_s\right).$$

Approksimoimalla integraalia Riemann-summilla kuten edellä nähdään, että

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_s^t 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du \mid Z(s)\right)$$

$$= \sum_{m\in E} \frac{\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du\right) 1(Z(s)=m)\right)}{\mathbb{P}(Z(s)=m)} \cdot 1(Z(s)=m).$$

2.12.6.

Olkoon $m \in E$ kiinteä ja

$$g_m(t) = \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du\right) 1(Z(s)=m)\right).$$

Jos $\Delta > 0$, $\Delta \to 0+$, niin

$$g_m(t+\Delta) - g_m(t)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\int_t^{t+\Delta} 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du\right) 1(Z(s)=m)\right).$$

Nyt

$$\lim_{\Delta\to 0+} \Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} 1(Z(u)=j)\mu_{jk}(u)\,du\; 1(Z(s)=m)$$

$$= 1(Z(t)=j)\mu_{jk}(t)\, 1(Z(s)=m) \quad \text{m.v.}$$

Konvergenssi on dominoitua, joten

$$\lim_{\Delta\to 0+} \frac{g_m(t+\Delta)-g_m(t)}{\Delta} = \mathbb{E}(1(Z(t)=j)\mu_{jk}(t) 1(Z(s)=m))$$

$$= \mathbb{P}(Z(s)=m)\, P_{mj}(s,t)\,\mu_{jk}(t).$$

Tästä seuraa (2.7.4).

Yhdistämällä saadut tulokset saadaan lauseen väite. $\square$

Seuraus 2.4. Nykyarvon (2.7) odotusarvo on

$$\int_0^n e^{-D(t)} S_{jk}(t)\, P_{j_0 j}(0,t)\, \mu_{jk}(t)\, dt.$$

Todistus. Lemman 1.2 ja lauseen 2.3 nojalla kyseinen odotusarvo on

$$\mathbb{E}\left(\int_0^n e^{-D(t)} S_{jk}(t)\, d\Lambda_{jk}(t)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^n e^{-D(t)} S_{jk}(t)\, 1(Z(t-)=j)\, \mu_{jk}(t)\, dt\right)$$

$$= \int_0^n e^{-D(t)} S_{jk}(t)\, P_{j_0 j}(0,t)\, \mu_{jk}(t)\, dt. \quad \square$$

Kaiken kaikkiaan siis tulevien suoritusten (maksettavat korvaukset vähennettynä vakuutusmaksuilla) pääoma-arvo on

$$\sum_{j \in E} \int_0^n e^{-D(t)} p_{j_0 j}(0,t)\, dA_j(t)$$

$$+ \sum_{\substack{j,k \in E \\ j \neq k}} \int_0^n e^{-D(t)} S_{jk}(t)\, p_{j_0 j}(0,t)\, \mu_{jk}(t)\, dt.$$