Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 3, 27.3.2013

Olkoon τ satunnaismuuttuja, $\tau(\omega) \in \{1, 2, \ldots\}, \forall \omega$, ja olkoon

$$\mathbb{P}(\tau = k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Määritellään yhden hypyn prosessi $N = \{N(n)\,;\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ehdoista $N(0) = 0$ ja

$$N(n) = \mathbb{1}(\tau \leq n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Olkoon $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\Lambda(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \sigma\left(N(1), \ldots, N(n)\right), \\
\lambda(n) &= \mathbb{E}(N(n) - N(n-1) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}), \\
\Lambda(n) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda(j),
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Tällöin Λ on N:n kompensaattori sigma-algebrajonon $(\mathcal{F}_n)$ suhteen,

1. Osoita, että $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{\tau = 1\}, \ldots, \{\tau = n\}, \{\tau > n\}\right)$.

2. Olkoon $B \in \mathcal{F}_n$. Osoita, että

$$B \cap \{\tau > n\} = \emptyset \quad \text{tai} \quad B \cap \{\tau > n\} = \{\tau > n\}.$$

3. Olkoon $B \in \mathcal{F}_{n-1}$. Osoita, että

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}(B)(N(n) - N(n-1))) = \begin{cases} 0, & \text{jos } B \cap \{\tau > n-1\} = \emptyset \\ p_n, & \text{jos } B \cap \{\tau > n-1\} = \{\tau > n-1\}. \end{cases}$$

4. Osoita, että

$$\lambda(n) = \begin{cases} \frac{p_n}{\sum_{j \geq n} p_j} \mathbb{1}(\tau \geq n), & \text{jos } \sum_{j \geq n} p_j > 0, \\ 0, & \text{jos } \sum_{j \geq n} p_j = 0, \end{cases}$$

ja että

$$\Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\min(\tau, n)} \frac{p_m}{\sum_{j \geq m} p_j}.$$

5. Olkoon erityisesti $p_k = p(1-p)^{k-1}$, missä $p \in (0, 1)$. Osoita, että

$$\Lambda(n) = p \min(\tau, n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

HV-jatko, harj. 3, 22.3.-13

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tau = k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \\ N(n) = 1(\tau \le n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathcal{F}_n = \sigma(N(1), \ldots, N(n)), \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(n) = \mathbb{E}(N(n) - N(n-1) \mid \mathcal{F}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \\ \Lambda(n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(j) \\ \Lambda \text{ on } N\text{:n kompensaattori} \end{cases}$$

1. Merkitään $\mathcal{G}_n = \sigma(\{\tau = 1\}, \ldots, \{\tau = n\}, \{\tau > n\})$
Koska

$$\{N(k) = 1\} = \{\tau \le k\}, \quad \text{niin}$$

$$\begin{cases} \{\tau = k\} = \{\tau \le k\} \setminus \{\tau \le k-1\} \in \mathcal{F}_n, \quad k = 1, \ldots, n, \\ \{\tau > n\} = \{\tau \le n\}^c \in \mathcal{F}_n. \end{cases}$$

Siis $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$. Samoin

$$\begin{cases} \{N(k) = 1\} = \{\tau \le k\} \in \mathcal{G}_n, \quad k = 1, \ldots, n \\ \{N(k) = 0\} = \{N(k) = 1\}^c \in \mathcal{G}_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $N(k)$ on $\mathcal{G}_n$-mitallinen $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n$.

2. Koska $\{\tau = 1\}, \ldots, \{\tau = n\}, \{\tau > n\}$ on Ω:n ositus, muodostuu $\mathcal{F}_n$ kaikista näiden yhdisteistä ja tyhjästä joukosta. Jos siis $B \in \mathcal{F}_n$, niin

$$B \cap \{\tau > n\} = \emptyset \text{ tai } \{\tau > n\}.$$

3. Koska $N(n) - N(n-1) = 0$, kun $\tau \le n-1$, niin

$$N(n) - N(n-1) = 1(\tau > n-1)\big(N(n) - N(n-1)\big).$$

Jos $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ ja $B \cap \{\tau > n-1\} = \emptyset$, niin

$$\mathbb{E}\big(1(B)\big(N(n) - N(n-1)\big)\big) = 0,$$ sillä $N(n-1) = N(n) = 1$ joukossa $\{\tau \le n-1\}$,

jos taas $B \cap \{\tau > n-1\} = \{\tau > n-1\}$, niin

$$\mathbb{E}\big(1(B)\big(N(n) - N(n-1)\big)\big)$$

$$= \mathbb{E}\big(1(\tau > n-1)\big(N(n) - N(n-1)\big)\big)$$

$$= \mathbb{E}\big(1(\tau = n)\big(N(n) - N(n-1)\big)\big) = p_n,$$ sillä $N(n) - N(n-1) = 0$, jos $\tau > n$.

4. Merkitään

$$\psi(n) = \begin{cases} \dfrac{p_n}{\sum_{j \ge n} p_j} \, 1(\tau \ge n) \\ 0, \quad \text{jos } \sum_{j \ge n} p_j = 0. \end{cases}$$

Tällöin $\psi(n)$ on $\mathcal{F}_{n-1}$-mitallinen, koska

$$1(\tau \ge n) = 1 - 1(\tau \le n-1)$$

Jos $B \in \mathcal{F}_{n-1}$, niin

$$\mathbb{E}(1(B)\,\psi(n)) = 0, \quad \text{jos} \quad B \cap \{\tau > n-1\} = \emptyset,$$

$$\mathbb{E}(1(B)\,\psi(n)) = \mathbb{E}(1(\tau > n-1)\,\psi(n))$$

$$= \mathbb{E}(\psi(n)) = p_n, \quad \text{jos} \quad B \cap \{\tau > n-1\} = \{\tau > n-1\}.$$

Nähdään, että

$$\mathbb{E}(N(n) - N(n-1) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \psi(n), \text{ joten } \lambda(n) = \psi(n)$$

$$\Rightarrow \Lambda(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{p_m}{\sum_{j \geq m} p_j} 1(\tau \geq m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\min(\tau,n)} \frac{p_m}{\sum_{j \geq m} p_j}.$$

5. $P(\tau = k) = p(1-p)^{k-1} = p_k$

$$\Rightarrow \sum_{j \geq m} p_k = p(1-p)^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = (1-p)^{m-1}$$

$$\Rightarrow \Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\min(\tau,n)} \frac{p(1-p)^{m-1}}{(1-p)^{m-1}} = p \min(\tau, n).$$