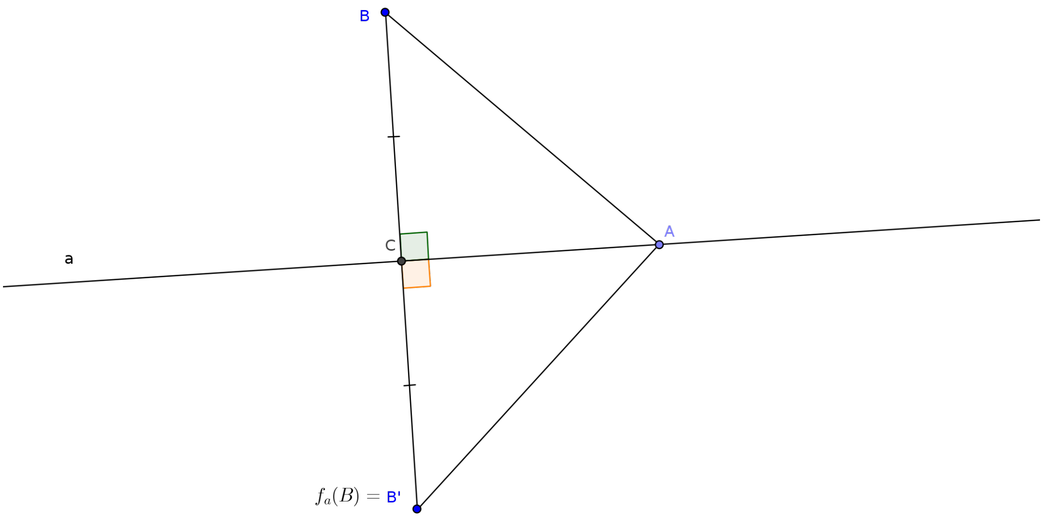
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 9
30.3. alkavalle viikolle

1. (Harjoitus 4.1.2., [L]) Osoita, että peilaus yli suoran a on yhtenevyyskuvaus. (Osa tästä eli $\overline{AB} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)}$, kun A, B samalla puolen suoraa a, osoitettiin luennolla. Totea, että sama pätee, jos A tai B tai molemmat kuuluvat suoralle a. Jatka osoittamalla ensin, että yhtenevyys pätee myös kun A ja B eri puolella suoraa a ja sen jälkeen loput yhtenevyyskuvauksen määrittelevistä ehdoista.)

   Ratkaisu. Lauseen 4.1.3. nojalla riittää näyttää, että kolmiolle ABC pätee $\triangle ABC \cong \triangle f_a(A)f_a(B)f_a(C)$. Jatketaan siitä, mihin luennolla on päästy.

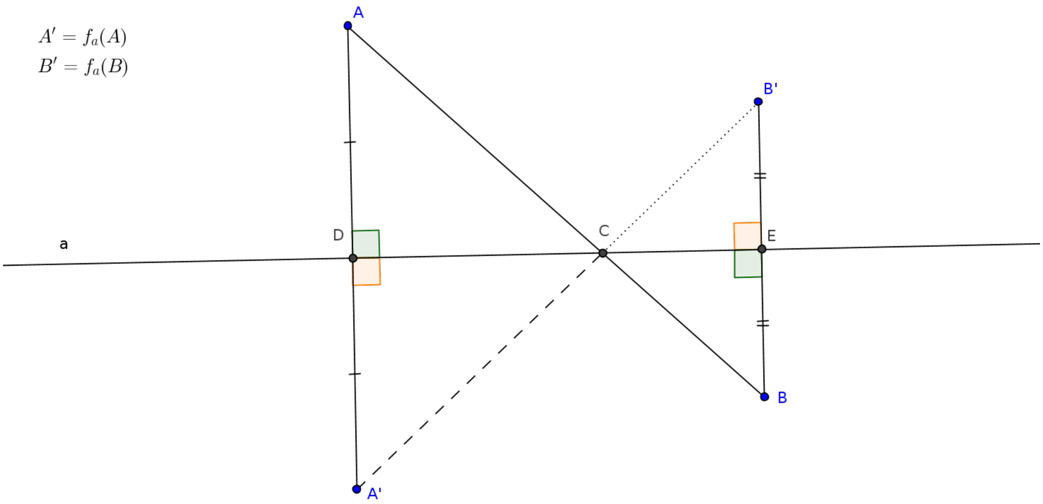
   Oletetaan, että $A \in a$, $B \notin a$. Olkoon C suoran a ja janan $\overline{Bf_a(B)}$ leikkauspiste. Nyt kolmioissa BCA ja $f_a(B)CA$ on $\overline{CB} \cong \overline{Cf_a(B)}$, suorat kulmat $\angle BCA \cong \angle f_a(B)CA$ ja $\overline{CA}$ on yhteinen sivu, joten kolmiot ovat yhtenevät (sks). Kolmioiden yhtenevyyden nojalla $\overline{AB} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)}$.



   Oletetaan, että $A \in a$, $B \in a$. Nyt $A = f_a(A)\hat{\text{A}}$ ja $B = f_a(B)$, joten triviaalisti $\overline{AB} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)}$.

   Oletetaan, että $A \notin a$, $B \notin a$ ja että A ja B ovat eri puolilla suoraa a. Olkoon C suoran a ja janan $\overline{AB}$ leikkauspiste, D suoran a ja janan

$\overline{Af_a(A)}$ leikkauspiste ja E suoran a ja janan $\overline{f_a(B)B}$ leikkauspiste. Nyt kolmioissa ADC ja $f_a(A)CD$ on yhteinen sivu $\overline{DC}$, yhtenevät suorat kulmat $\angle ADC \cong \angle f_a(A)DC$ ja yhtenevät sivut $\overline{AD} \cong \overline{f_a(A)D}$, joten kolmiot ovat yhtenevät (sks). Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\overline{AC} \cong \overline{f_a(A)C}$.



Aivan vastaavasti todetaan kolmiot BEC ja $f_a(B)EC$ yhteneviksi, mistä $\overline{CB} \cong \overline{Cf_a(B)}$. Seuraa

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \cong \overline{f_a(A)C} + \overline{Cf_a(B)}.$$

Kolmiot BCA ja $f_a(B)CA$ ovat yhtenevät, $\angle ACD$ ja $\angle BCE$ ristikulmat ja kolmiot BEC ja $f_a(B)EC$ yhtenevät, joten $\angle f_a(A)CD \cong ACD\angle BCE \cong \angle f_a(B)CE$. Kulman $\angle f_a(B)CE$ vieruskulmana $\angle f_a(B)CD$ on siis myös kulman $\angle f_a(A)CD$ vieruskulma. Vieruskulmilla $\angle f_a(B)CD$ ja $\angle f_a(A)CD$ on yhteinen kylki $\overrightarrow{CD}$, joten pisteet $f_a(A)$, C ja $f_a(B)$ ovat samalla suoralla. Saadaan $\overline{AB} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)}$.

Tässä ja luennolla on nyt siis näytetty, että mielivaltaisille pisteille A ja B pätee $\overline{AB} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)}$.

Oletetaan, että ABC on kolmio. Näytetään, että myös $f_a(A)f_a(B)f_a(C)$ on kolmio. Tehdään vastaoletus: $f_a(A), f_a(B), f_a(C)$ ovat samalla suoralla, vaikkapa $f_a(B)$ kahden muun välissä. Koska ABC on kolmio, pätee kolmioepäyhtälö $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Lisäksi vastaoletuksesta

$$\overline{f_a(A)f_a(C)} = \overline{f_a(A)f_a(B)} + \overline{f_a(B)f_a(C)}.$$

Äsken näytetyn nojalla saadaan siis ristiriita

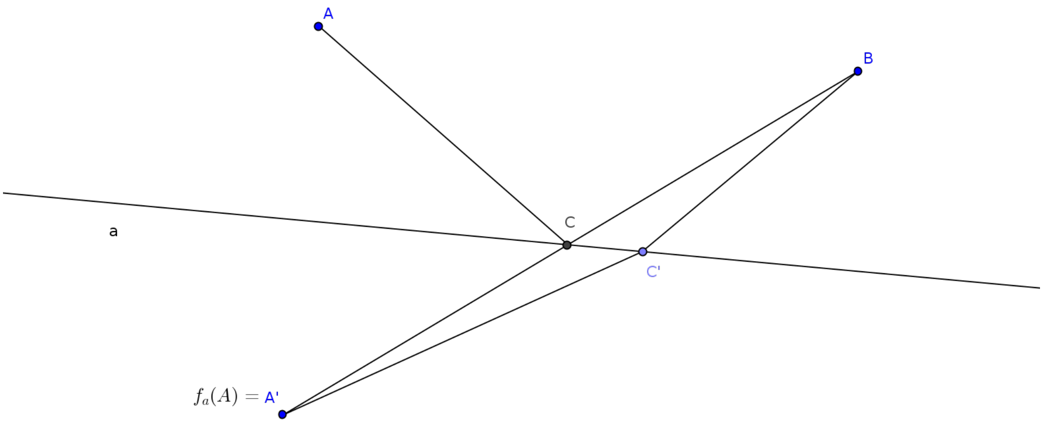
$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)} + \overline{f_a(B)f_a(C)} \cong \overline{f_a(A)f_a(C)} \cong \overline{AC},$$

joten vastaoletus ei päde ja $f_a(A)f_a(B)f_a(C)$ on kolmio.

Mielivaltaiselle kolmiolle ABC siis pätee, että $f_a(A)f_a(B)f_a(C)$ on kolmio ja $\overline{AB} \cong \overline{f_a(A)f_a(B)}$, $\overline{BC} \cong \overline{f_a(B)f_a(C)}$ ja $\overline{CA} \cong \overline{f_a(C)f_a(A)}$, joten kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle f_a(A)f_a(B)f_a(C)$ ovat yhtenevät (sss). Näin ollen lauseen 4.1.3. nojalla peilaus yli suoran a on yhtenevyyskuvaus. $\square$

2. (Harjoitus 4.1.3., [L]) Olkoot A ja B samalla puolella suoraa a. Määritä murtoviivoista ACB, missä $C \in a$, lyhin.

   Ratkaisu. Olkoon C suoran a ja janan $\overline{f_a(A)B}$ leikkauspiste ja $C' \neq C$ piste suoralla a. Peilaus on yhtenevyyskuvaus (tehtävä 1), joten $\overline{AC} \cong \overline{f_a(A)C}$ ja siis $\overline{AC} + \overline{CB} \cong \overline{f_a(A)C} + \overline{CB} = \overline{f_a(A)B}$ sekä vastaavasti $\overline{A'C} + \overline{C'B} \cong \overline{f_a(A)C'} + \overline{C'B}$.

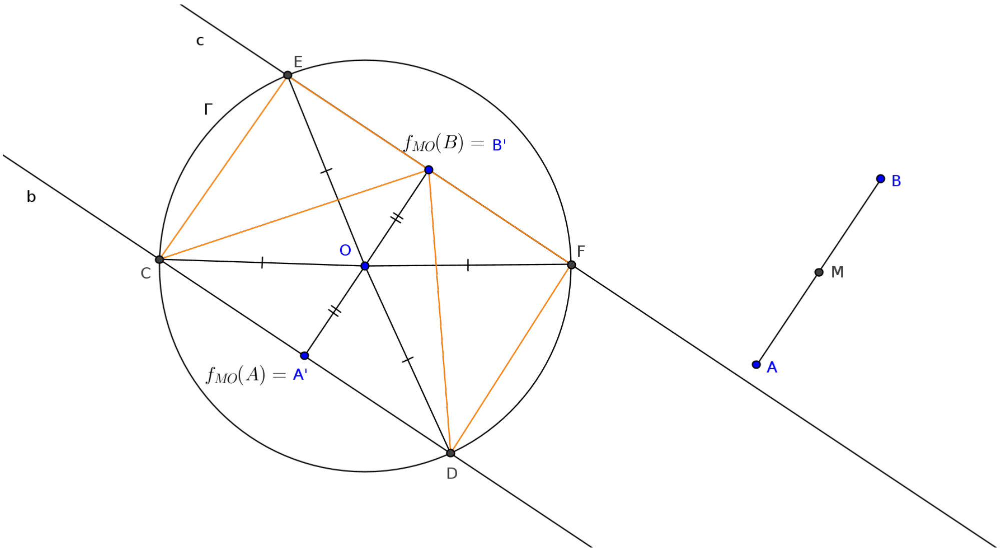


   Kolmioepäyhtälöstä $\overline{f_a(A)B} < \overline{f_a(A)C'} + \overline{C'B}$, joten $\overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AC'} + \overline{C'B}$. Piste C on siis etsitty lyhimmän murtoviivan muodostava piste. $\square$

3. (Harjoitus 4.1.7., [L]) Olkoot Γ O-keskinen r-säteinen ympyrä ja $\overline{AB}$ jana, jonka pituus on $a < 2r$. Konstruoi sellainen ympyrän Γ sisään piirretty suorakaide, jonka yksi sivu on AB:n suuntainen ja a:n pituinen.

Ratkaisu. Olkoon M janan $\overline{AB}$ keskipiste. Jana $\overline{AB}$ kuvautuu siirrossa f_{MO} ympyrän Γ sisään. Suoran a kuva $f_{MO}(a)$ on a. Lisäksi siirto yhtenevyyskuvauksena kuvaa kulmat yhteneville kulmille, joten samankohtaiset kulmat suorilla $f_{MO}(A)f_{MO}(B)$ ja AB Ovat yhtenevät. Suora $f_{MO}(A)f_{MO}(B)$ on siten yhdensuuntainen suoran AB kanssa.

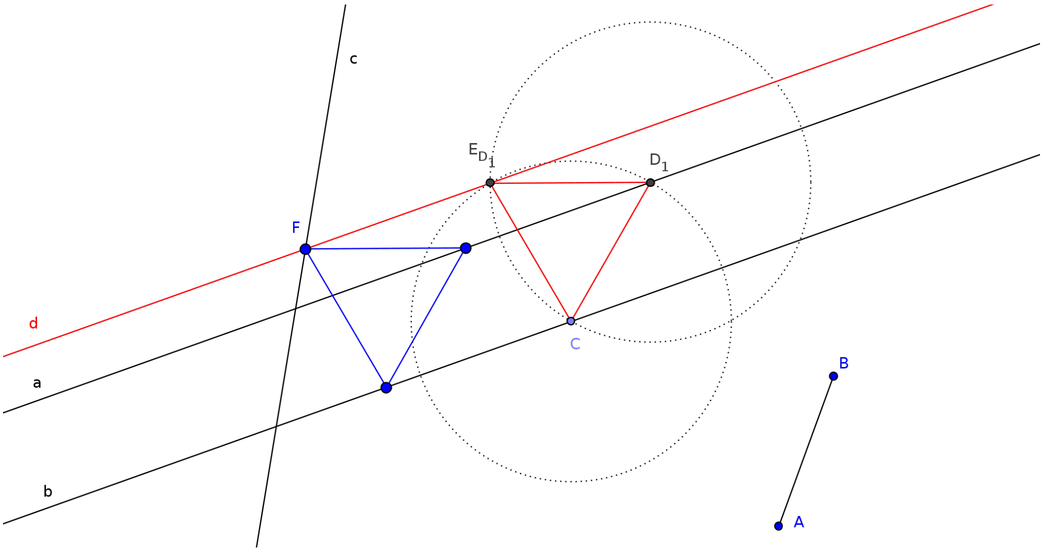
Olkoot b ja c suoran $f_{MO}(A)f_{MO}(B)$ normaalit pisteiden $f_{MO}(A)$ ja $f_{MO}(B)$ kautta ja C, D, E, F näiden normaalien leikkauspisteet ympyrän Γ kanssa, C ja E samalla puolella suoraa $f_{MO}(A)f_{MO}(B)$.



Kolmiot $\triangle ODf_{MO}(A)$, $\triangle OCf_{MO}(A)$, $\triangle OEf_{MO}(B)$ ja $\triangle OFf_{MO}(B)$ ovat yhteneviä (suorakulmainen ssk), joten $\overline{f_{MO}(A)D} \cong \overline{f_{MO}(A)C} \cong \overline{f_{MO}(B)E} \cong \overline{f_{MO}(B)F}$. Nyt kolmiot $f_{MO}(A)f_{MO}(B)C \cong ECf_{MO}(B)$ (suorakulmainen ssk) ja kolmiot $f_{MO}(A)Df_{MO}(B) \cong Ff_{MO}(B)D$ (suorakulmainen ssk), mistä kulmat $\angle f_{MO}(A)CE$ ja $\angle f_{MO}(B)FD$ ovat suoria, eli CE ja DF ovat normaaleja suorille CD ja EF. Nelikulmiossa $CDFE$ on siis suorat kulmat, eli se on toivotunlainen suorakulmio.

4. (Harjoitus 4.1.8., [L]) Suorat a ja b ovat yhdensuuntaiset ja c leikkaa ne. Jana $\overline{AB}$ on pidempi kuin suorien a ja b kohtisuora etäisyys. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka sivu on $\overline{AB}$:n pituinen ja jonka kärjet ovat suorilla a, b ja c.

   Eräs ratkaisu. Olkoon C jokin suoran a piste. C-keskinen, $\overline{AB}$-säteinen ympyrä Γ leikkaa suoran b kahdessa pisteessä, valitaan niistä toinen, D_1. Nyt D_1-keskinen, $\overline{AB}$-säteinen ympyrä leikkaa ympyrän Γ kahdessa pisteessä, valitaan niistä toinen, E_{D1}. Kolmio CD_1E_{D1} on tasasivuinen ja sen sivut ovat yhteneviä janan $\overline{AB}$ kanssa.



Olkoon d pisteen E_{D1} kautta kulkeva suoran a kanssa yhdensuuntainen suora ja F sen leikkauspiste suoran c kanssa. Siirto $f_{E_{D1}F}$ vie pisteen E_{D1} pisteelle F, joka on suoralla c. Lisäksi pisteen C kuva on suoralla a, pisteen D_1 kuva on suoralla b ja yhtenevyyskuvauksena $f_{E_{D1}F}$ vie kolmion yhtenevälle kolmiolle, joten $f_{E_{D1}F}(C)f_{E_{D1}F}(D)f_{E_{D1}F}(E)$ on eräs toivotunlainen kolmio. (Riippuen pisteen D ja siitä riippuvan pisteen E valinnasta saadaan jokin neljästä mahdollisesta kuvatunlaisesta kolmiosta.)

5. (Harjoitus 4.1.11., [L]) Olkoon $f = f_a$ peilaus yli suoran. Osoita, että kolmiot ABC ja $f(A)f(B)f(C)$ ovat vastakkaisesti suunnistetut.

   Ratkaisu. Tutkittavia tapauksia on melko paljon. Hyväksyttävä ratkaisu ei edellyttänyt aivan kaikkien läpikäyntiä.

   Periaatteessa seuraavista tapauksista on kaikista myös versio, jossa ABC on negatiivisesti suunnistettu. Käytännössä kuitenkin toisen version käsittely riittää (todistuksissa voisi korvata kaikki sanat "vasen", "oikea", "positiivinen"ja "negatiivinen"sanoilla "oikea", "vasen", "negatiivinen"ja "positiivinen"ja saisi todistuksen rinnakkaiselle tapaukselle). Lisäksi seuraavissa oletetaan, että kolmion pisteet on nimetty käsittelyn kannalta mahdollisimman kätevästi. Tapaukset, joissa pisteiden nimet eivät vastaa oletuksia, voidaan pisteet nimetä uudelleen (suunnistus säilyttäen!) niin, että todistus pätee sellaisenaan myös niille tapauksille.

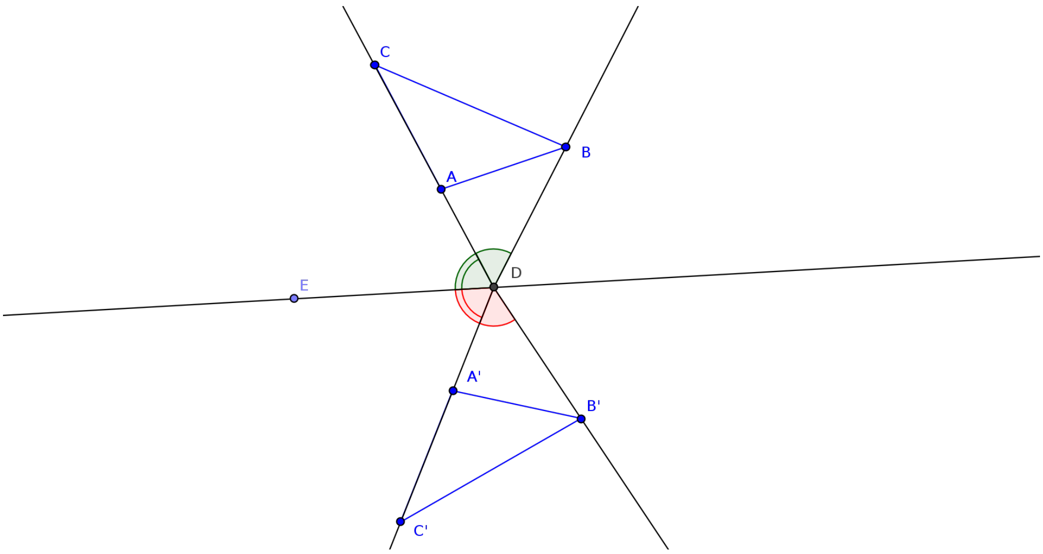
   Ratkaisussa käytetään hyväksi sitä tietoa, että jokin kahden kolmion kärkipisteen kautta kulkevista suorista väistämättä leikkaa suoran a (vain yksi näistä suorista voi olla yhdensuuntainen suoran a kanssa).

Merkitään pisteiden A, B, C kuvia kuvauksessa f_a A', B', C'.

Oletetaan, että ABC on positiivisesti suunnistettu kolmio ja

i) pisteet A, B, C ovat samalla puolella suoraa a.

Olkoot D suorien AC ja a leikkauspiste (oletetaan, että A on pisteiden C ja D välissä) ja E suoran a piste eri puolelta suoraa AC kuin B. Kolmio on positiivisesti suunnistettu, joten B on puolisuoran $\overrightarrow{AC}$ oikealla puolella. Puolisuora $\overrightarrow{AC}$ on puolisuoralla $\overrightarrow{DC}$, joten B on myös puolisuoran $\overrightarrow{DC}$ oikealla puolella, joten $\overrightarrow{DC}$ on kulman $\angle BDE$ aukeamassa ja $\angle CDE < \angle BDE$.

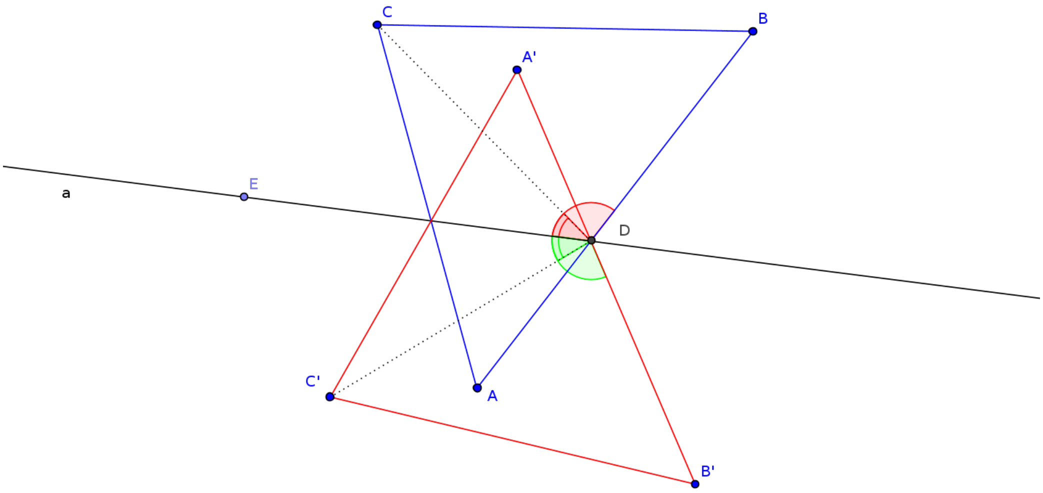


Puolisuora $\overrightarrow{DC}$ on $\overrightarrow{DE}$ oikealla puolella, joten $\overrightarrow{DC'}$ on puolisuoran $\overrightarrow{DE}$ vasemmalla puolella. Yhtenevyyskuvauksena f_a kuvaa kulmat yhteneville kulmille, joten $\angle EDC' < \angle EDB'$. Puolisuora $\overrightarrow{DB'}$ ja siten piste B' on puolisuoran $\overrightarrow{DC'}$ vasemmalla puolella.

Koska A on pisteiden C ja D välissä ja f_a on yhtenevyyskuvaus, on A' pisteiden D ja C' välissä. Puolisuora $\overrightarrow{A'C'}$ on siis puolisuoralla $\overrightarrow{DC'}$, joten piste B on puolisuoran $\overrightarrow{A'C'}$ vasemmalla puolella. Kolmio $A'B'C'$ on siis negatiivisesti suunnistettu.

ii) A on eri puolella suoraa a kuin muut pisteet.

Olkoot D suoran a ja janan $\overline{AB}$ leikkauspiste ja E suoralla a samalla puolella suoraa AB kuin C. Kolmio on positiivisesti suunnistettu, joten piste C on puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ vasemmalla puolella. Puolisuora $\overrightarrow{DB}$ on puolisuoralla $\overrightarrow{AB}$, joten piste C on puolisuoran $\overrightarrow{DB}$ vasemmalla puolella.

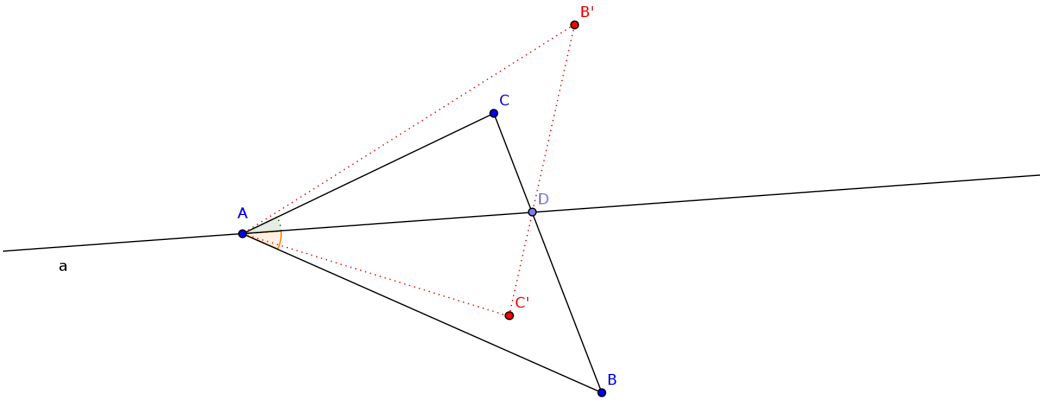


Piste C on kulman $\angle BDE$ aukeamassa ja siis $\angle CDE < \angle BDE$. Yhtenevyyskuvauksena f_a kuvaa kulmat yhteneville kulmille, joten $\angle EDC' < \angle EDB'$. Puolisuora $\overrightarrow{DB'}$ on kulman $\angle EDB'$ vasen kylki, joten C' on sen oikealla puolella. Puolisuora $\overrightarrow{DB'}$ on puolisuoralla $\overrightarrow{A'B'}$, joten C' on myös puolisuoran $\overrightarrow{A'B'}$ oikealla puolella. Kolmio $A'B'C'$ on siis negatiivisesti suunnistettu.

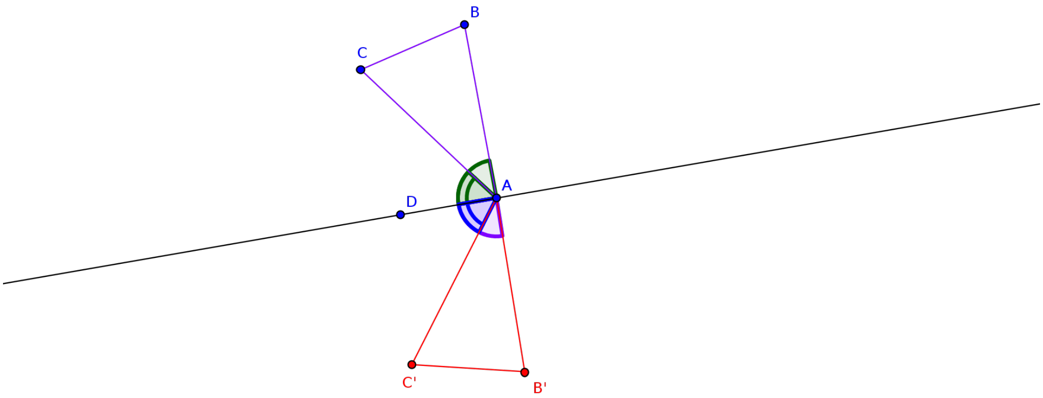
iii) A on suoran a piste, muut kaksi ovat eri puolilla suoraa a.

Olkoon D suoran a ja janan $\overline{BC}$ leikkauspiste. Kolmio on positiivisesti suunnistettu, joten C on puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ vasemmalla puolella.

Puolisuora $\overrightarrow{AC}$ on siis kulman $\angle DAC$ vasen kylki, ja $\overrightarrow{AC'}$ on kulman $\angle DAC'$ oikea kylki. Samoin todetaan, että $\overrightarrow{A'B'}$ on kulman $\angle DA'B'$ vasen kylki. Siis C' on puolisuoran $\overrightarrow{A'B'}$ oikealla puolella ja kolmio $A'B'C'$Â on negatiivisesti suunnistettu.



iv) A on suoran a piste, muut ovat samalla puolella suoraa a.



Olkoon D suoralla a samalla puolella suoraa AC kuin B. Kolmio on positiivisesti suunnistettu, joten B on puolisuoran $\overrightarrow{AC}$ oikealla puolella ja siten $\overrightarrow{AB}$ on kulman $\angle DAC$ aukeamassa eli $\angle DAB < \angle DAC$.

Yhtenevyyskuvauksena f_a kuvaa kulmat yhteneville kulmille, joten $\angle DAB' < \angle DAC'$. Puolisuora $\overrightarrow{AB'}$ on kulman $\angle DAB'$ vasen kylki, joten $\overrightarrow{AC'}$ ja siten C' ovat puolisuoran $\overrightarrow{AB'}$ oikealla puolella. Kolmio $A'B'C'$ on siis negatiivisesti suunnistettu.

v) A ja C ovat suoralla a.

Kolmio on positiivisesti suunnistettu, joten B on puolisuoran $\overrightarrow{AC}$ oikealla puolella. Piste B' on siis puolisuoran $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ vasemmalla puolella, joten $A'B'C'$ on negatiivisesti suunnistettu.

□

6. (Harjoitus 4.1.14., [L]) Osoita: jos $a \perp b$ ovat kaksi O:ssa toisensa leikkaavaa suoraa, niin $f_O = f_b \circ f_a$.

Ratkaisu. Jos piste A on ainakin toisella suorista a, b, on sen kuva triviaalisti sama kuvauksissa f_O ja $f_b \circ f_a$.

Olkoon A piste, joka ei ole suoralla a eikä b. Määritelmän mukaan kuvapiste $B = f_O(A)$ on suoralla AO eri puolella pistettä O kuin A siten, että $\overline{AO} \cong \overline{OB}$. Olkoon A' pisteen A kuva peilauksessa f_a ja A'' pisteen A' kuva peilauksessa f_b, eli A'' on pisteen A kuva yhdistetyssä kuvauksessa $f_b \circ f_a$. Olkoon vielä C janan $\overline{AA'}$ ja suoran a leikkauspiste ja D janan $\overline{A'A''}$ ja suoran b leikkauspiste.

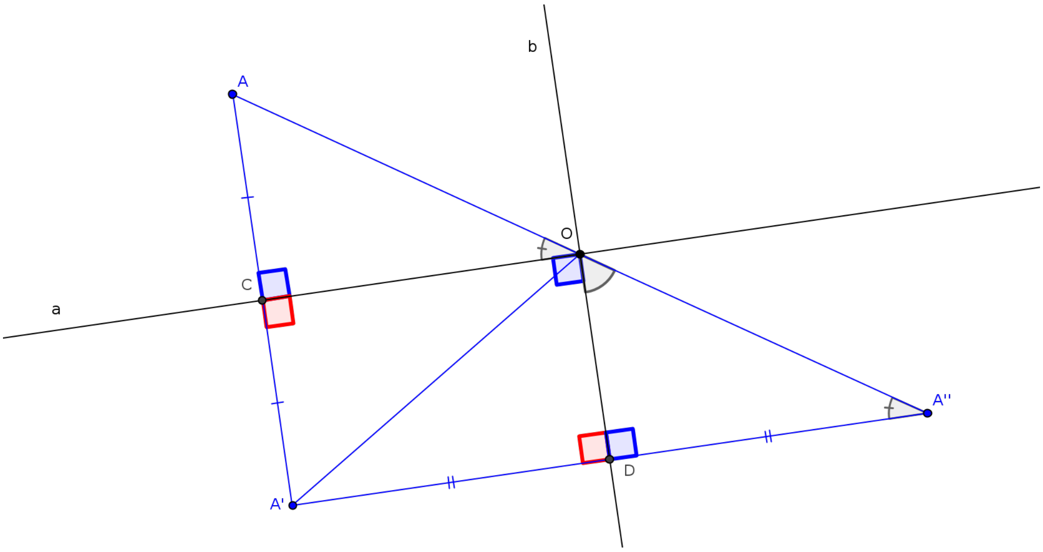
Kolmioissa AOC ja $A'OC$ on yhteinen sivu $\overline{OC}$, peilauksen määritelmän nojalla yhtenevät sivut $\overline{CA} \cong \overline{CA'}$ ja yhtenevät suorat kulmat $\angle OCA \cong \angle OCA'$, joten kolmiot ovat yhtenevät (sks). Nelikulmion $ODA'C$ kulmat ovat suoria, eli sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten se on suunnikas ja siten sen vastakkaiset sivut ovat yhtenevät. Kolmioissa $OA'C$ ja $OA'D$ on siis yksi yhteinen sivu ja kaksi yhtenevää sivua, joten kolmiot ovat yhtenevät (sss). Kolmioissa $A'OD$ ja $A''OD$ on yhteinen sivu $\overline{OD}$, peilauksen määritelmän nojalla yhtenevät sivut $\overline{DA'} \cong \overline{DA''}$ ja yhtenevät suorat kulmat $\angle ODA' \cong \angle ODA''$, joten kolmiot ovat yhtenevät (sks).

Nyt kolmioiden yhtenevyyksien (ja janojen yhtenevyyden transitiivisuuden) nojalla $\overline{AO} \cong \overline{A''O}$.

Kolmion $OA''D$ kulman $\angle A''OD$ vieruskulma on sen kahden muun kulman summa, siis $\angle DA''O + \angle ODA''$. Toisaalta äsken todettujen kolmioiden yhtenevyyksien perusteella $\angle DA''O \cong \angle AOC$ ja lisäksi $a \perp b$, joten suorina kulmina $\angle ODA'' \cong \angle COD$. Näin ollen $\angle A''OD$ ja $\angle DOA$ ovat vieruskulmia, joilla on yhteinen kylki, ja siten pisteet A, O ja A'' ovat samalla suoralla.

On siis $A'' = B$, joten kuvaukset f_O ja $f_b \circ f_a$ vievät samat pisteet samoille pisteille ja $f_O = f_b \circ f_a$.

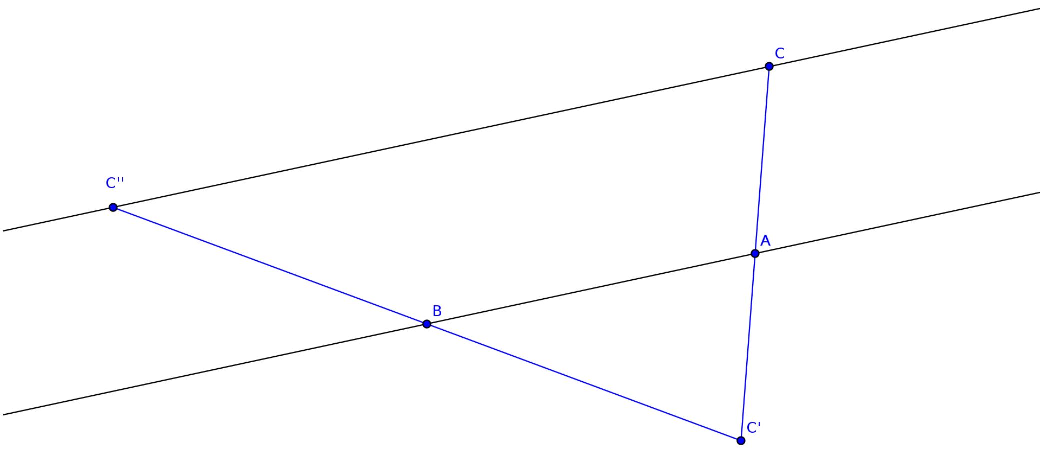
□



7. (Harjoitus 4.1.15., [L]) Olkoot $A \neq B$ kaksi pistettä. Selvitä, mikä on kuvaus $f_B \circ f_A$.

   Ratkaisu.

   Olkoon $C \notin AB$, $C' = f_A(C)$ ja $C'' = f_B(C')$. Piste A on janan $\overline{CC'}$ keskipiste, samoin on B janan $\overline{C'C''}$ keskipiste, joten harjoituksen 1.5.8. mukaan suoran CC'' kanssa yhdensuuntainen suora pisteen $A\hat{A}$ kautta kulkee myös pisteen B kautta. Suorat AB ja CC'' ovat siis yhdensuuntaiset. Lisäksi, edelleen harjoituksen 1.5.8. nojalla, on $\overline{CC'} \cong 2\overline{AB}$.



   Olkoon puolestaan $D \in AB$. Valitaan jokin piste C sen kautta kulkevalta suoran AB normaalilta b. Peilaus pisteen suhteen f_A kuvaa kulmat yhteneville kulmille ja siten suoran AB normaalin b kuvasuoran (edelleen AB) normaalille b'. Edelleen f_B kuvaa normaalin b' normaalille b''. Äsken nähtiin, että $CC'' \parallel AB$, joten koska $b \parallel b''$, on $CC''D''D$ suunnikas. Suunnikkaan vastakkaiset sivut yhtenevät, joten äsken käydyn tapauksen perusteella $\overline{DD''} \cong 2\overline{AB}$.

Nähdään siis, että jos E on puolisuoralla $\overrightarrow{AB}$ niin, että $\overline{EB} \cong \overline{BA}$, niin kuvaus $f_A \circ f_B$ on siirto f_{AD} ("siirretään $\overrightarrow{AB}$) suuntaisesti $2\overline{AB}$ verran").

8.* Keksi tehtävää 2 vastaava sanallinen, arkielämään liittyvä ongelma.

Ratkaisuehdotus. Laskareissa ja ohjauksissa nähtiin paljon hyviä ratkaisuja. Useimmissa ratkaisuissa pyrittiin minimoimaan käytettävien rakennusmateriaalien määrä (esim. sijoittamalla sähköpistorasia oikeaan kohtaan seinää) tai kulkemaan mahdollisimman lyhyttä reittiä (matkalla jonnekin käytiin vaikkapa juomassa joen rannasta, poimimassa kukkia niityn laidalta tai myymässä tavaroita maantien varressa).