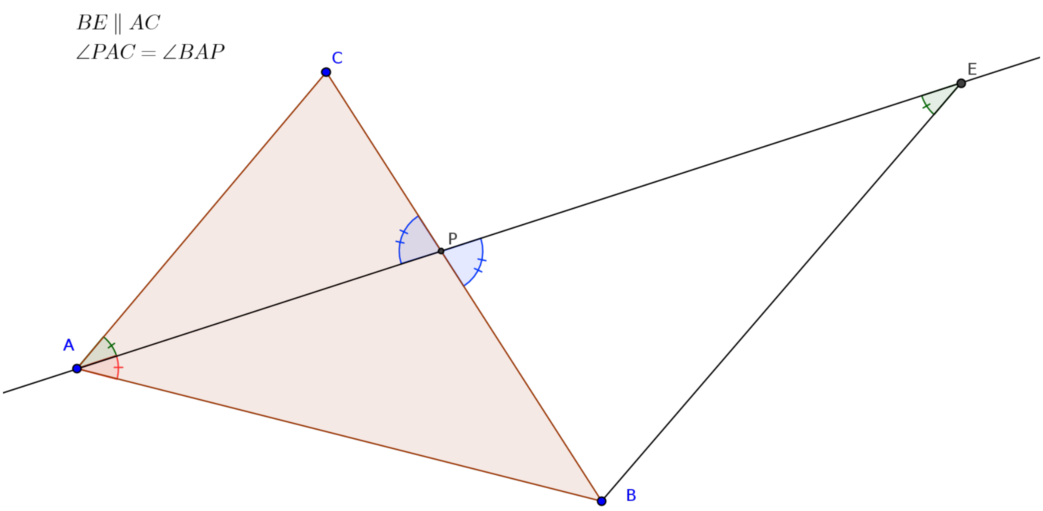
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 8
23.3. alkavalle viikolle

1. Luennolla (ke 18.3.) osoitettiin, että kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakaa kulman vastaisen sivun ulkopuolisesti viereisten sivujen suhteessa. Osoita, että kyseisen kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun samassa suhteessa.
   Vihje: Ol. ABC kolmio ja $P \in \overline{BC}$ siten, että $\overrightarrow{AP}$ puolittaa kulman α. Piirrä sivun $\overline{AC}$ kanssa yhdensuuntainen jana $\overline{BE}$, missä $E \in \overrightarrow{AP}$ ja etsi yhdenmuotoisia kolmioita.

   Ratkaisu. Olkoon E vihjeen mukainen. Nyt samankohtaisten kulmien ristikulmina ovat $\angle PAC = \angle PEB$ ja ristikulmina $\angle CPA = \angle BPE$, joten kolmiot PCA ja PBE ovat yhdenmuotoiset (kk). Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa $\frac{\overline{PC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BE}}$.



   Koska AP on kulman $\angle BAC$ puolittaja ja äsken todettiin $\angle PEB = \angle PAC$, on myös $\angle PEB = \angle BAP$. Kolmiossa ABE on siis yhtä suuret kulmat $\angle PEB$ ja $\angle BAP$, joten sen sivut $\overline{AB}$ ja $\overline{BE}$ ovat yhtenevät (aasinsiltalause).

   Saadaan $\frac{\overline{PC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$. $\square$

Huom! Myös lause 2.3.1. todistaa tämän saman asian. Tässä tarkoitus oli todistaa tulos toisella tavalla annettua vihjettä käyttäen.

2. (Harjoitus 2.3.3., [L]) Olkoon M janan $\overline{BC}$ keskipiste ja $P \neq M$. Olkoon Q se suoran BC piste, joka jakaa janan $\overline{BC}$ ulkopuolisesti suhteessa $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$. Osoita, että niiden pisteiden X joukko, joille

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}},$$

on ympyrä Γ, jonka halkaisija on $\overline{PQ}$.

Ratkaisu.

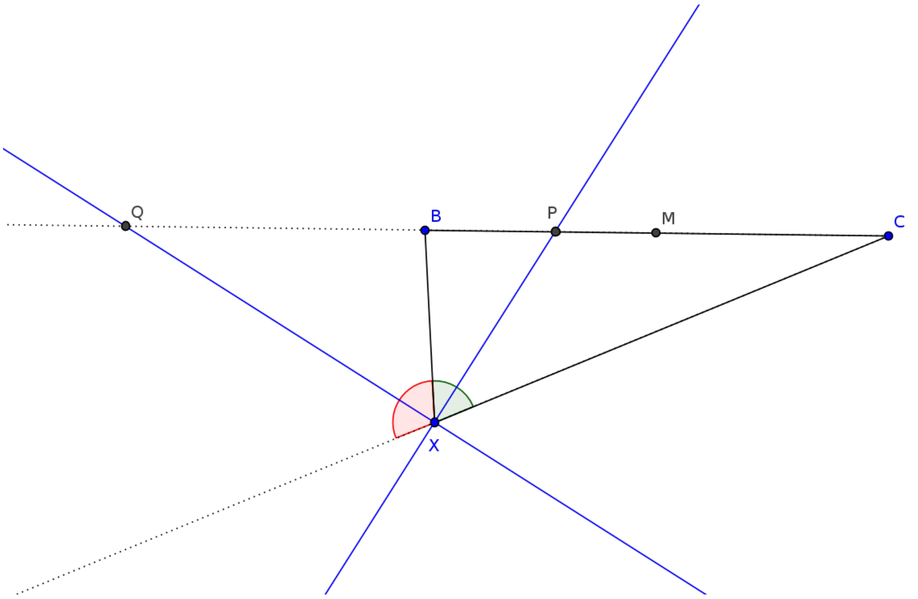
Näytetään ensin, että ehdon täyttävät pisteet ovat ympyrällä Γ. Olkoon A piste, jolle $\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$. Kolmion ABC kulman α puolittaja leikkaa sivun $\overline{BC}$ pisteessä, joka jakaa sivun viereisten sivujen suhteessa (kulmanpuolittajalause, siis tehtävä 1) - eli pisteessä P. Samoin kyseisen kolmion kulman vieruskulma leikkaa suoran BC pisteessä, joka jakaa janan $\overline{BC}$ ulkopuolisesti kolmion sivujen suhteessa (harjoitus 2.3.2., johon tehtävän 1 johdanto viittaa) - siis pisteessä Q.

Harjoituksen 2.3.1. mukaan ovat nämä kolmion kulman ja sen vieruskulman kulmanpuolittajat AQ ja AP kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska kulma $\angle PAQ$ on suora kulma, on $\overline{PQ}$ pisteiden P, Q, A ympäri piirretyn ympyrän halkaisija (harjoitus 1.6.7.).

Toisin sanoen mielivaltainen annetun ehdon täyttävä piste A kuluu ympyrään Γ.

Näytetään sitten, että kaikki ympyrän Γ pisteet täyttävät ehdon. Olkoon nyt siis piste A jokin ympyrän Γ piste. Kolmion ABC kulman α puolittaja jakaa sivun $\overline{BC}$ muiden sivujen suhteessa (kulmanpuolittajalause), joten riittää näyttää, että kulman α puolittaja leikkaa janan $\overline{BC}$ pisteessä P. Merkitään tämän kulmanpuolittajan ja janan $\overline{BC}$ leikkauspistettä P'. Jos $P = P'$, ehto pätee pisteelle A. Oletetaan, että $P \neq P'$.

Nyt P' on joko pisteiden P ja B tai P ja C välissä. Oletetaan näistä vaikkapa ensimmäinen todeksi. (Seuraava päättely pätee pienin muunnoksin myös toiselle tapaukselle.) Nyt $\overline{BP'} < \overline{BP}$ ja $\overline{CP} < \overline{CP'}$, joten $\frac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}} < \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$.



Merkitään kolmion kulman α vieruskulman puolittajan ja suoran BC leikkauspistettä Q'. Piste Q' on pisteiden Q ja C välissä (muutoin kulman $\angle PAQ$ kyljet olisivat suoran kulman $P'AQ'$ aukeamassa, mikä on mahdotonta, sillä $A \in \Gamma$, joten myös kulma $\angle PAQ$ on suora kulma eikä siis kulmaa $P'AQ'$ pienempi), joten $\overline{QC} = \overline{Q'C} + \overline{QQ'}$ ja $\overline{QB} = \overline{QB} + \overline{QQ'}$.

Nyt

$$\overline{CQ'} < \overline{BQ'} \qquad \Big| \cdot \frac{\overline{QQ'}}{\overline{CQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})}$$

$$\overline{CQ'}\frac{\overline{QQ'}}{\overline{CQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})} < \overline{BQ'}\frac{\overline{QQ'}}{\overline{CQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})} \qquad \Big| + \frac{\overline{BQ'} \cdot \overline{CQ'}}{\overline{CQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})}$$

$$\frac{\overline{CQ'}(\overline{BQ'} + \overline{QQ'})}{\overline{CQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})} < \frac{\overline{BQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})}{\overline{CQ'}(\overline{CQ'} + \overline{QQ'})}$$

$$\frac{\overline{BQ'} + \overline{QQ'}}{\overline{CQ'} + \overline{QQ'}} < \frac{\overline{BQ'}}{\overline{CQ'}}$$

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} < \frac{\overline{BQ'}}{\overline{CQ'}}.$$

Saadaan siis

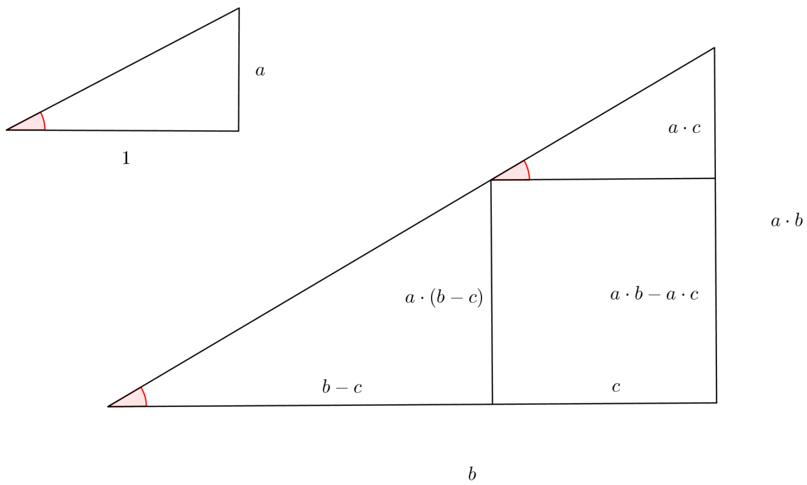
$$\frac{BP'}{CP'} < \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{CQ} < \frac{BQ'}{CQ'},$$

mistä $\frac{BP'}{CP'} < \frac{BQ'}{CQ'}$ vaikka kolmion kulman puolittaja ja sen vieruskulman puolittaja jakavat vastakkaisen sivun samassa suhteessa, $\frac{BP'}{CP'} = \frac{BQ'}{CQ'}$. Ristiriita, joten $P = P'$. $\square$

3. (Harjoitus 2.3.5., [L]) Osoita, että jos O on r-säteisen ympyrän Γ keskipiste ja $\overline{OA} = d$, niin pisteen A potenssi Γ:n suhteen on $|r^2 - d^2|$.

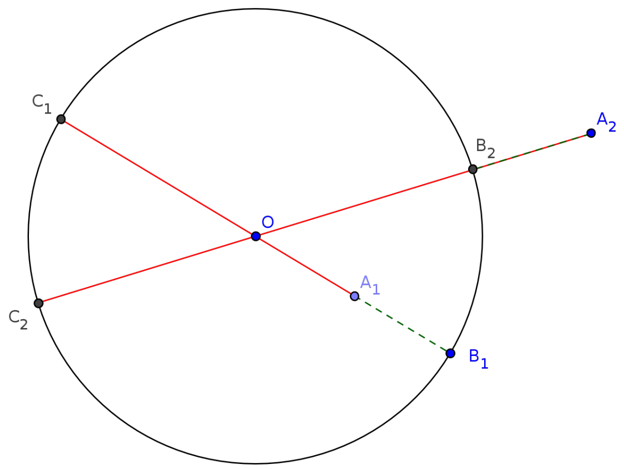
Ratkaisu. Todetaan ensin, että seuraavan kuvan mukaisella konstruktiolla nähdään janojen vähennyslaskun osittelevan janojen tulon suhteen, eli $a(b - c) = ab - ac$.

Kuva 1: Vähennyslaskun osittelulaki



Huomioidaan, että pisteen potenssia ei ole määritelty ympyrän pisteille (potenssin laskeminen vaatisi "nollajanan"). Käsiteltäviä tapauksia on siis kaksi, sen mukaan onko piste ympyrän sisä- vai ulkopuolella.

Olkoon A ympyrän sisällä. Pisteen potenssi ei riipu sen laskemiseen käytetystä jänteestä. Valitaan jänteeksi se halkaisija $\overline{BC}$, jolle A kuuluu. Nyt $\overline{AB} = r + d$ ja $\overline{AC} = r - d$ (tai toisin päin), joten $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (r + d)(r - d) = r(r - d) + d(r - d) = r^2 - rd + dr - d^2 = r^2 - d^2$.



Olkoon nyt A ympyrän ulkopuolella. Valitaan taas jänteeksi se halkaisija $\overline{BC}$, jota vastaavalle suoralle A kuuluu. Nyt $\overline{AB} = d+r$ ja $\overline{AC} = d-r$ (tai toisin päin), joten $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (d+r)(d-r) = d(d-r)+r(d-r) = d^2 - dr + rd - r^2 = d^2 - r^2$.

Nämä kaksi tulosta voi yhdistää sanomalla, että pisteen A potenssi on $|r^2 - d^2|$.

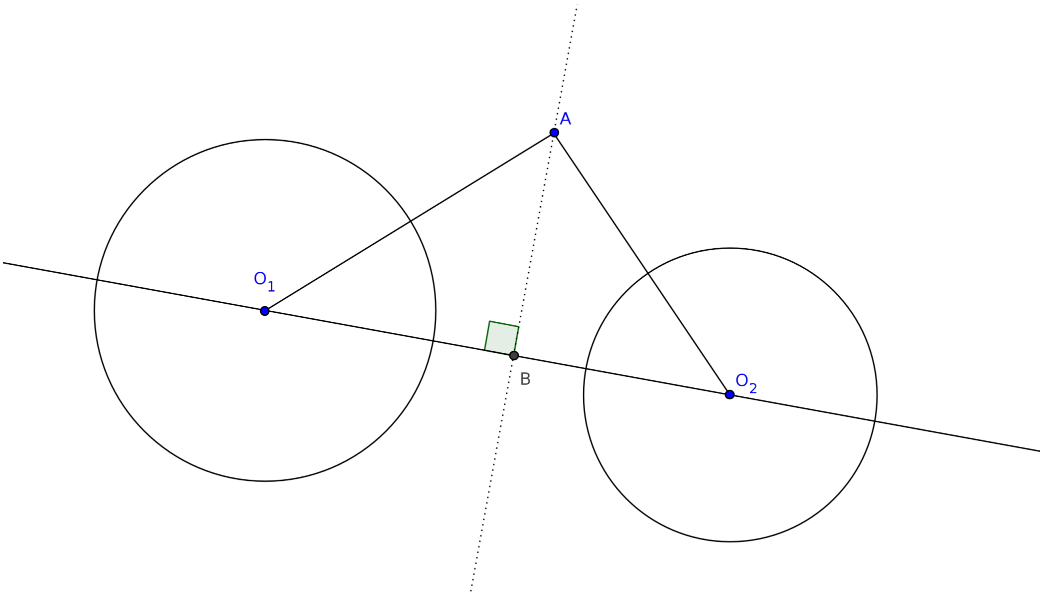
$\square$

4. (Harjoitus 2.3.8., [L]) Osoita, että jos O_1 ja O_2 ($O_1 \neq O_2$) ovat Γ_1:n ja Γ_2:n keskipisteet ja Γ_1 ja Γ_2 eivät leikkaa, niin niiden radikaaliakseli on eräs suoraa O_1O_2 vastaan kohtisuora suora.

   Ratkaisu.

   Olkoon jokin A piste ympyröiden Γ_1:n ja Γ_2 radikaaliakselilta. Tarkastellaan sen kohtisuoraa projektiota B ympyröiden keskipisteet yhdistävällä suoralla O_1O_2.

   Merkitään ympyröiden säteitä r_1, r_2 ja oletetaan $r_1 > r_2$. Tehtävän 3. nojalla ympyrän potenssi p ympyrän Γ_1 suhteen on $p = \overline{O_1A}^2 - r_1^2$. Radikaaliakselin pisteelle sen potenssi kummankin ympyrän suhteen on sama, ja myös toisen ympyrän suhteen pätee tehtävän 3. tulos eli $p = \overline{O_2A}^2 - r_2^2$. Näistä saadaan $\overline{O_1A}^2 = p + r_1^2$ sekä $\overline{O_2A}^2 = p + r_2^2$.



Suorakulmaisista kolmioista ABO_1 ja ABO_2 saadaan nyt siis Pythagoraan lauseella $\overline{BO_1}^2 = \overline{O_1A}^2 - \overline{AB}^2 = p + r_1^2 - \overline{AB}$ ja $\overline{BO_2}^2 = \overline{O_2A}^2 - \overline{AB}^2 = p + r_2^2 - \overline{AB}$, ja vähentämällä nämä puolittain toisistaan

$$\overline{BO_1}^2 - \overline{BO_2}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Toisaalta (tehtävän 3. ratkaisun aputuloksen nojalla) $\overline{BO_1}^2 - \overline{BO_2}^2 = (\overline{BO_1} - \overline{BO_2})(\overline{BO_1} + \overline{BO_2}) = (\overline{BO_1} - \overline{BO_2})\overline{O_1O_2}$, joten

$$\overline{BO_1} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{\overline{O_1O_2}} + \overline{BO_2},$$

ja koska $\overline{O_1O_2} = \overline{BO_1} + \overline{BO_2}$ eli $\overline{BO_2} = \overline{O_1O_2} - \overline{BO_1}$, saadaan viimein

$$2\overline{BO_1} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{\overline{O_1O_2}} + \overline{O_1O_2}.$$

Piste B ei siis riipu mitenkään pisteestä A, sillä jana $\overline{BO_1}$ riippuu vain ympyröiden Γ_1, Γ_2 säteistä ja niiden keskipisteistä. Toisin sanoen mielivaltaisille radikaaliakselin pisteille niiden kohtisuora projektio suoralla O_1O_2 on sama piste B, joten ne ovat kaikki samalla pisteen B kautta kulkevalla suoran O_1O_2 normaalilla.

Olkoon nyt A jokin piste sillä suoran O_1O_2 normaalilla, jolle ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 radikaaliakseli kuuluu. Äsken nähtiin, että kyseisen normaalin leikkauspisteelle suoran O_1O_2 kanssa pätee

$$\overline{O_1B}^2 - \overline{O_2B}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

mistä

$$\overline{O_1B}^2 - r_1^2 = \overline{O_2B}^2 - r_2^2. \quad (1)$$

Pythagoraan lause antaa suorakulmaisista kolmioista ABO_1 ja ABO_2 niiden yhteiselle sivulle $\overline{AB}$

$$\overline{O_1A}^2 - \overline{O_1B}^2 = \overline{O_2A}^2 - \overline{O_2B}^2. \quad (2)$$

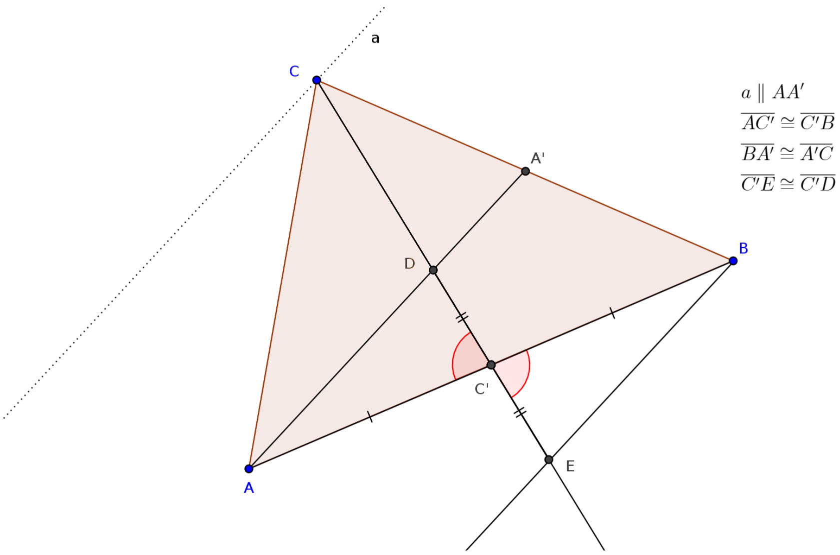
Laskemalla (1) ja (2) puolittain yhteen saadaan

$$\overline{O_1A}^2 - r_1^2 = \overline{O_2A}^2 - r_2^2,$$

missä tehtävän 3. nojalla yhtälön vasen puoli on pisteen A potenssi ympyrän Γ_1 suhteen ja oikea puoli sen potenssi ympyrän Γ_2 suhteen. Piste A on siis ympyröiden radikaaliakselilla.

□

5. (Harjoitus 2.3.10., [L]) Osoita, että kolmion *painopiste* (= keskijanojen leikkauspiste) jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2 : 1. *Ratkaisu.*



Olkoon ABC kolmio, A' sivun $\overline{BC}$ keskipiste ja C' sivun $\overline{AB}$ keskipiste ja piste D janojen $\overline{AA'}$ ja $\overline{CC'}$ leikkauspiste.

Valitaan puolisuoran $\overrightarrow{C'D}$ vastakkaiselta puolisuoralta piste E siten, että $\overline{C'E} \cong \overline{C'D}$. Nyt kolmioissa $AC'D$ ja $BC'E$ on yhtenevät sivut $\overline{AC'} \cong \overline{BC'}$, ristikulmat $\angle AC'D \cong \angle BC'E$ ja yhtenevät sivut $\overline{C'D} \cong \overline{C'E}$, joten ne ovat yhtenevät (ksk). Yhtenevyyden nojalla $\angle C'DA \cong \angle C'EB$, joten suorat AA' ja BE ovat yhdensuuntaiset. Olkoot a pisteen C kautta kulkeva suoran AA' kanssa yhdensuuntainen suora. Nyt kolme yhdensuuntaista suoraa EB,AA' ja a erottavat suorasta BC yhtenevẗ janat $\overline{BA'} \cong \overline{A'C}$, joten lauseen 1.5.6. nojalla ne erottavat yhtenevẗ janat myös suorasta CC', siis $\overline{ED} \cong \overline{DC}$.

On siis $\overline{CD} \cong \overline{DE} = \overline{C'D} + \overline{C'E} = 2\overline{C'D}$. Kolmion keskijanojen leikkauspiste D siis jakaa mediaanin $\overline{CC'}$ kahden suhteessa yhteen.

□

6. Jaetaan jana kultaisella leikkauksella osiin a ja b. Oletetaan, että $b > a$ ja jaetaan b edelleen kultaisella leikkauksella osiin c ja d, $d > c$. Osoita, että $d = a$.

Ratkaisu.

Janoille a, b, c ja d pätevät siis seuraavat suhteet:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = \varphi$$

ja

$$\frac{c+d}{d} = \frac{d}{c} = \varphi.$$

Lisäksi tietysti $c + d = b$.

Pätee siis

$$\frac{b}{a} = \varphi = \frac{c+d}{d} = \frac{b}{d},$$

eli $\frac{b}{a} = \frac{b}{d}$ mistä $a = d$. □

7.* *Fibonaccin lukujono* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ (1,1,2,3,5, ...) määritellään rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$F_1 = 1, F_2 = 1,$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ kaikilla } n \geq 3.$$

Osoita induktiolla, että

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

missä $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on *kultainen suhde.*

Vihje: Osoita tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ alkuaskeleina erikseen ja tapaukset $n \geq 3$ induktiolla. Käytä tietoa $\varphi^2 = \varphi + 1$ ja $(1-\varphi)^2 = 2 - \varphi$.

Ratkaisu. Tapaus $n = 1$:

$$\frac{\varphi - (1-\varphi)}{\sqrt{5}} = \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1.$$

Tapaus $n = 2$: (käytetään tietoa $\varphi^2 = \varphi + 1$ ja $(1-\varphi)^2 = 2 - \varphi$)

$$\frac{\varphi^2 - (1-\varphi)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi + 1 - (2-\varphi)}{\sqrt{5}} = \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{5}} = 1 = F_2.$$

Induktio-oletus:

$$F_k = \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} \quad \text{kaikilla } k \leq n, \quad n \geq 3.$$

Induktioväite:

$$F_{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Todistetaan induktioväite:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \overset{i.o.}{=} \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - (1-\varphi)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n-1} \cdot \varphi^2 - (1-\varphi)^{n-1}(2-\varphi)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n-1}(\varphi - 1)^2\Big) \\
&= \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

(Yo. yhtälöissä on käytetty tietoja $\varphi + 1 = \varphi^2$ ja $2 - \varphi = (\varphi - 1)^2$.) Induktioväite on siis tosi. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \geq 1$.

8.* Tehtävän 2 ympyrä on ns. Apolloniuksen ympyrä. Selvitä mikä on *Apolloniuksen ympyräparvi* (esim. googlettamalla 'Apollonian circles'), piirrä niistä muutamia ja etsi ympyräparven kaikille ympyräpareille yhteinen radikaaliakseli.

Ratkaisu. Olkoot $\overline{AB}$ jana ja M sen keskipiste. Olkoon piste P janan $\overline{AB}$ piste siten, että $P \neq M$. Olkoon Γ ympyrä, jonka pisteille X pätee

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}.$$

(vrt. tehtävä 2.) Kaikki tällaiset ympyrät Γ muodostavat ns. Apolloniuksen ympyräparven (huomaa, että ympyräparven määrittelee jana $\overline{AB}$ ja yksittäiset ympyrät parvessa riippuvat vain valitusta pisteestä P). Apolloniuksen ympyräparvelle pätee:

- Mikään ympyräparven ympyröistä ei leikkaa toista.
- Kaikilla ympyräparven ympyräpareilla on sama radikaaliakseli, joka on janan $\overline{AB}$ keskinormaali (vrt. tehtävät 3. ja 4.).

Kuvassa 2 on sinisellä piirretty muutamia ympyröitä ympyräparvesta (kuva Wikipediasta: `http://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_circles`). Punaisella piirretyt ympyrät ovat janan $\overline{AB}$ päätepisteiden kautta kulkevia ympyröitä. Jokainen Apolloniuksen ympyräparven ympyrä leikkaa jokaista punaista ympyrää kohtisuorasti.

Kuva 2: Apolloniuksen ympyräparvi