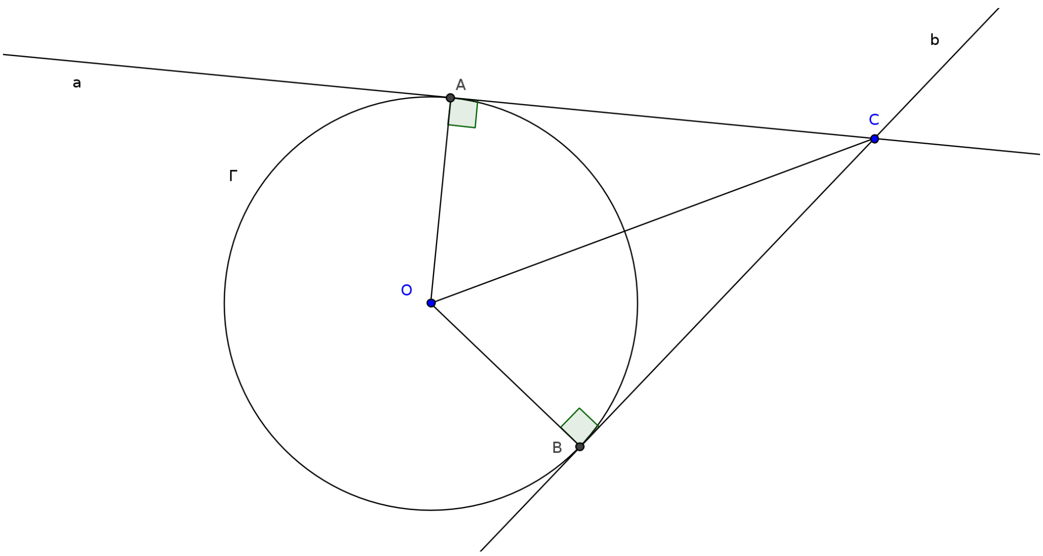
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 6
23.2. alkavalle viikolle

Huom! 1. kurssikoe on ma 2.3. klo 13-15. Mikäli et pääse varsinaiseen kokeeseen, ks. kurssisivulta korvaavan kokeen aika. Kertaustehtävät ilmestyvät kurssisivulle viimeistään ma 23.2. ja niitä käydään läpi "ohjausmaisesti" pe 27.2. luennolla.

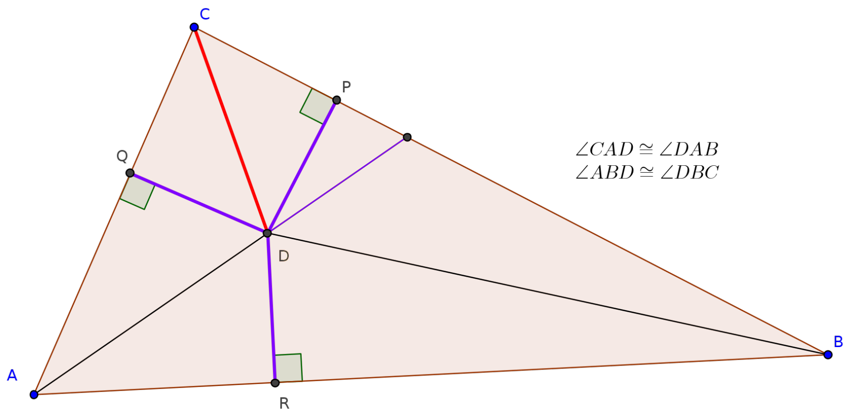
1. (Harjoitus 1.6.4., [L]) Todista: jos suorat a ja b leikkaavat toisensa pisteessä C ja sivuavat ympyrää Γ pisteissä A ja B, niin $\overline{CA} \cong \overline{CB}$.

   Ratkaisu. Olkoon ympyrän Γ keskipiste O. Lauseen 1.6.2. nojalla suorat a ja OA ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja suorat b ja OB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kolmioissa COA ja COB on yhteinen sivu $\overline{CO}$, ympyrän Γ säteen kanssa yhtenevinä keskenään yhtenevät sivut $\overline{OB} \cong \overline{OA}$ ja yhtenevät suorat kulmat $\angle OAC \cong \angle OBC$, joten harjoituksen 1.4.14. (suorakulmainen ssk) nojalla kolmiot yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyyden perusteella on $\overline{CA} \cong \overline{CB}$. $\square$



2. (Harjoitus 1.6.5., [L]) Todista, että kolmion ABC kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä I.

   Ratkaisu. Lauseen 1.3.2. nojalla kulman $\angle CAB$ puolittaja leikkaa janan $\overline{BC}$ pisteessä, joka on pisteiden B ja C välissä. Lauseen 1.3.2. nojalla kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa janan $\overline{AP}$ pisteessä D, joka on kulman $\angle ABC$ aukeamassa.



Olkoot P, Q, R pisteen D kohtisuorat projektiot (harjoitus 1.5.2.) suorilla BC, CA ja AB.

Kolmioissa BDR ja BDP on yhtenevät (suorat) kulmat $\angle BRD \cong \angle BPD$, yhtenevät kulmat $\angle DBR \cong \angle DBP$ (D on kulman $\angle RBP$ kulmanpuolittajalla) ja yhteinen sivu BD, joten lauseen 1.4.9. (kks) nojalla kolmiot ovat yhtenevät.

Samoin kolmioissa ADQ ja ADR on yhtenevät (suorat) kulmat $\angle AQD \cong \angle ARD$, yhtenevät kulmat $\angle DAQ \cong \angle DAR$ ja yhteinen sivu AD, joten lauseen 1.4.9. (kks) nojalla myös nämä kolmiot ovat yhtenevät.

Ensiksi mainitusta kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\overline{DP} \cong \overline{DR}$ ja jäljemmästä $\overline{DR} \cong \overline{DQ}$. Janojen yhtenevyyden transitiivisuudesta saadaan siis $\overline{DQ} \cong \overline{DP}$. Nyt on kolmioissa CDQ ja CDP siis yhteinen sivu $\overline{CD}$, yhtenevät sivut $\overline{DQ} \cong \overline{DP}$ ja suorat kulmat $\angle DQC \cong \angle DPC$, joten harjoituksen 1.4.14. (suorakulmainen ssk) mukaan kolmiot ovat yhtenevät.

Kolmioiden yhtenevyydestä $\angle DCQ \cong \angle DCP$, eli suora CD on kulman $\angle BCA$ puolittaja. Kaikki kolme kulmanpuolittajaa siis kulkevat pisteen D kautta. $\square$

3. (Harjoitus 1.6.7., [L]) Olkoot A, B ja C ympyrän Γ pisteitä ja $\angle ACB$ suora kulma. Osoita, että $\overline{AB}$ on ympyrän Γ halkaisija.

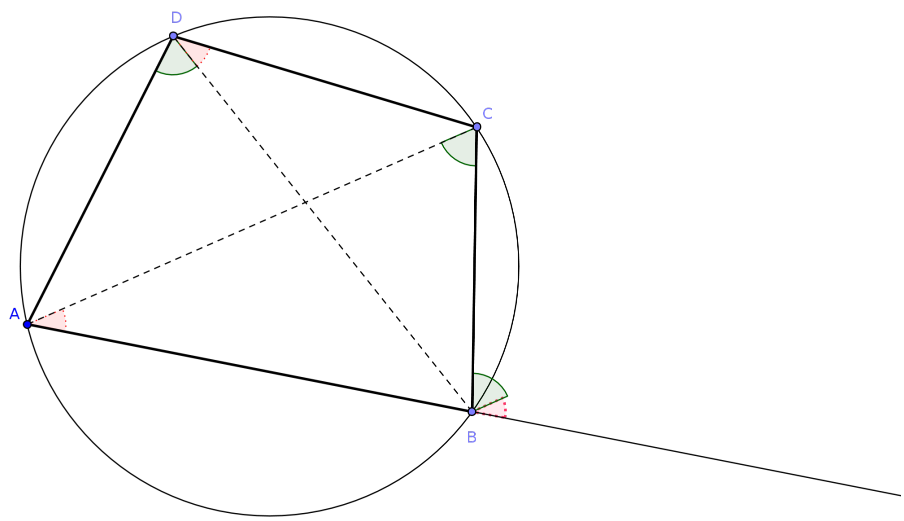
Ratkaisuehdotus.

Oletetaan tilanne tehtävänannon mukaiseksi.

Olkoon B' toinen päätepiste sillä ympyrän Γ halkaisijalla, jonka toinen päätepiste on A. Nyt lauseen 1.6.7. nojalla on $\angle ACB'$ suora kulma. Aksioomasta 10 seuraa, että $\overrightarrow{CB}$ ja $\overrightarrow{CB'}$ ovat sama puolisuora. Lauseen 1.6.3. nojalla suoralla CB ei voi olla enempää kuin kaksi yhteistä pistettä ympyrän Γ kanssa, C ja B, joten $B = B'$. $\square$

4. (Harjoitus 1.6.10., [L]) Osoita: Jos $ABCD$ on jännenelikulmio, niin $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ ovat vieruskulmia.

   Eräs ratkaisu. Kehäkulmalauseen 1.6.8. (tai lauseen 1.6.7., jos A ja B ovat nelikulmion $ABCD$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisijan päätepisteet) mukaan $\angle ADB \cong \angle ACB$. Samoin lauseen 1.6.8. (tai lauseen 1.6.7., jos B ja C ovat nelikulmion $ABCD$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisijan päätepisteet) mukaan $\angle BDC \cong \angle BAC$. Kulman $\angle CDA$ aukeamassa on siis piste B niin, että $\angle BDA \cong \angle BCA$ ja $\angle BDC \cong \angle BAC$. Lisäksi lauseen 1.5.4. nojalla kulman $\angle ABC$ vieruskulma on kolmion ABC kulmien $\angle BAC$ ja $\angle BCA$ summa, joten lauseen 1.4.6. ("kulmien summa on hyvin määritelty") nojalla $\angle CDA$ on kulman $\angle ABC$ vieruskulma. $\square$



5. (YO-tehtävä, S2009) Janasta poistetaan keskimmäinen kolmannes. Jäljelle jääneistä osajanoista poistetaan jälleen keskimmäinen kolmannes.

Poistamista jatketaan loputtomiin poistamalla jokaisella askeleella jäljellä olevista osajanoista keskimmäinen kolmannes. Mikä on poistettujen osien yhteinen pituus verrattuna janan alkuperäiseen pituuteen?

Ratkaisuehdotus.

Kussakin vaiheessa jäljellä olevista osajanoista poistetaan kolmannes, ja seuraavaan vaiheeseen jää siis jäljelle kaksi kolmannesta edellisen vaiheen pituudesta. Jos janan alkuperäinen pituus on a, on poistettujen osien pituus siten

$$a\frac{1}{3} + a\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + a(\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} + a(\frac{2}{3})^3 \cdot \frac{1}{3} + ...$$

Tämä on geometrinen sarja suhdelukunaan $q = \frac{2}{3}$. Geometrisen sarjan summa on

$$\frac{n_1}{1-q} = \frac{a\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = a.$$

Poistettujen osien pituus on siis sama kuin alkuperäisen janan pituus.

6. (YO-tehtävä, K2012) Olkoon $t > 0$. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteen $\left(0, \frac{1}{t}\right)$ kautta ja sivuaa x-akselia pisteessä $(t, 0)$.

   a) Määritä kertoimet a, b ja c parametrin t avulla lausuttuna.

   b) Näytä, että paraabelin ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen pinta-ala ei riipu paramaterin t arvosta.

Ratkaisuehdotus.

a) Paraabelin ja y-akselin leikkauspisteessä on $y = \frac{1}{t}$, $x = 0$. Paraabelin ja x-akselin leikkauspisteessä on $y = 0$, $x = t$. Paraabelin minimikohdassa $(t, 0)$ sen derivaatta on nolla. Paraabelin yhtälöstä saadaan siis

$$\frac{1}{t} = c\ ,$$
$$0 = at^2 + bt + c,$$
$$0 = 2at + b.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä $c = \frac{1}{t}$.

Sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön ja ratkaisemalla saadaan $b = -at - \frac{1}{t^2}$.

Sijoittamalla tämä kolmanteen yhtälöön saadaan $at + \frac{1}{t^2} = 2at$ ja ratkaisemalla $a = \frac{1}{t^3}$.

Nyt siis $a = \frac{1}{t^3}$, $b = -at - \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^2}$ ja $c = \frac{1}{t}$.

b) Paraabelin ja koordinaattiakselien rajaama pinta-ala on muuttujan x arvoilla $0 - t$ paraabelin kuvaajan alapuolelle jäävä ala, siis paraabelin integraali tuolla välillä. Lasketaan integraali.

$$\begin{aligned}\int_0^t (ax^2 + bx + c)\, dx &= \int_0^t (\frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t})\, dx \\ = \Big|_0^t (\frac{1}{3t^3}x^3 - \frac{2}{2t^2}x^2 + \frac{1}{t}x) &= (\frac{1}{3} - 1 + 1) - (0 - 0 + 0) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Tulos ei siis riipu siitä, mikä arvo t on.

7.* (YO-tehtävä, S2012) Suora ympyrälieriö on pallon sisällä niin, että sen molempien pohjien reunat sivuavat pallon pintaa. Pallon pinta-alan suhdetta lieriön koko pinta-alaan merkitään symbolilla t. Lieriön koko pinta-alalla tarkoitetaan sen vaipan ja pohjien yhteenlaskettuja pinta-aloja.

a) Määritä lieriön korkeuden suhde lieriön pohjan säteeseen parametrin t avulla lausuttuna.

Millä parametrin t arvoilla

b) tälläista lieriötä ei ole olemassa.

c) on täsmälleen yksi tällainen lieriö.

d) on kaksi tällaista lieriötä.

Eräs ratkaisu.

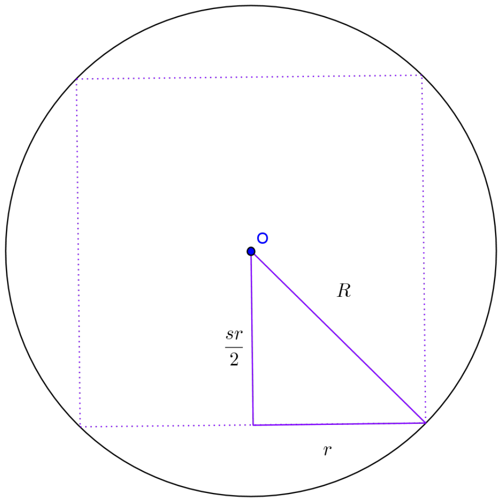
a) Merkitään lieriön pohjaympyrän sädettä r, pallon sädettä R ja etsittyä pohjaympyrän säteen ja lieriön korkeuden suhdetta s.

Nyt pallon säteelle $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{sr}{2}\right)^2}$ (vrt. kuva).

Pallon pinta-ala on $4\pi r^2$ ja lieriön pinta-ala on summa sen päätyympyröiden ja vaipan alasta. Pallon pinta-alan ja kartion pinta-alan suhteelle t saadaan nyt

$$t = \frac{A_P}{A_K} = \frac{4\pi R^2}{2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot sr} = \frac{4\pi(r^2 + (\frac{sr}{2})^2)}{2\pi r^2(1+s)} = \frac{2 + \frac{1}{2}s^2}{1+s}$$

Kuva 1: Pystysuora leikkaus pallosta ja ympyrälieriöstä.



eli

$$t = \frac{2 + \frac{1}{2}s^2}{1 + s}$$

ja tästä

$$s^2 - 2ts + 4 - 2t = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan nyt ratkaisu

$$s = t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 4}.$$

b) Äsken johdetun suhteen s lausekkeessa neliöjuuren sisältä löytyvä lauseke $t^2 + 2t - 4$ ei saa olla negatiivinen, tällaisilla parametrin t arvoilla vastaavaa ympyrälieriöta ei voi olla olemassa. Funktio $y = t^2 + 2t - 4$ määrää ylöspäin aukeavan paraabelin, toiseen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan sen nollakohdat $t = -1 \pm \sqrt{5}$, joiden välissä se saa negatiivisia arvoja. Toisaalta t ei kahden positiivisen määreen (pinta-alan) suhteena voi saada negatiivisia arvoja, joten millään nollaa pienemmällä t kaivattua lieriöta ei ole olemassa. Siis suhdetta t vastaavia lieriöitä ei ole lainkaan, kun $t < \sqrt{5} - 1$.

Nämä parametrin t arvot vastaavat lieriöitä, jotka eivät mahtuisi pallon sisään.

c) Toisaalta suhdetta t vastaavia lieriöitä on vain yksi silloin, kun suhteen s lausekkeessa esiintyvän neliöjuuren sisältä löytyy 0, jolloin äskeisen mukaan $t = -1 \pm \sqrt{5}$, joista positiivinen vaihtoehto kelpuutetaan.

Toisaalta lieriöitä löytyy vain yksi myös silloin, kun neliöjuuren arvo on suurempi kuin t, sillä tällöin vain positiivinen vaihtoehto kelpaa suhteen s arvoksi. Näin on, kun

$$t < \sqrt{t^2 + 2t - 4},$$

mistä $t > 2$.

Lieriöitä on vain yksi siis silloin, kun $t = \sqrt{5} - 1$ tai $t > 2$.

Näistä ensimmäinen tapaus vastaa suurinta ympyrään mahtuvaa lieriöta, joita on vain yksi. Jäljempi tapaus vastaa pieniä pohjaympyrän säteitä: sädettä pienentämällä lieriön pinta-alan saa mielivaltaisen pieneksi, kun taas sädettä kasvattaessa lieriön pohja- ja kansiympyrät estävät pinta-alan kutistumisen tietyn rajan alle. Pienimpiä lieriön pinta-aloja ei siis saa kuin yhdellä tavalla.

d) Tiettyä suhdetta vastaavia lieriöitä on kaksi tapauksissa, joissa niitä ei ole vain nollaa tai yhtä. Aiempien kohtien perusteella näin on, kun $\sqrt{5} - 1 < t < 2$.