MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Ratkaisuehdotuksia 3. harjoituksiin

Tarvitsetko vihjeitä laskuissa alkuun pääsemiseksi, etkä pääse luennoille tai ohjauksiin? Kysy Moodlessa!

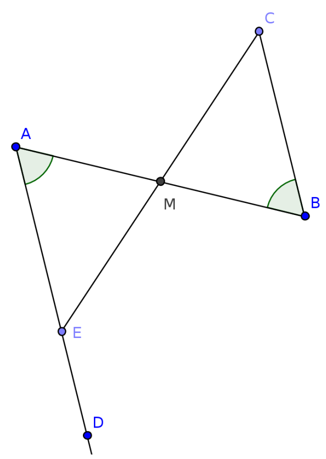
1. (Harjoitus 1.4.7. + 1.4.8., [L]) Osoita, että janalla $\overline{AB}$ on täsmälleen yksi piste M siten, että $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

   Ratkaisuehdotus.

   Tehtävänannon mukaisesti näytetään:

- janalta $\overline{AB}$ löytyy keskipiste M,
- tuo keskipiste on pisteiden A ja B välissä (ja siten janalla $\overline{AB}$) sekä
- keskipiste on yksikäsitteinen.

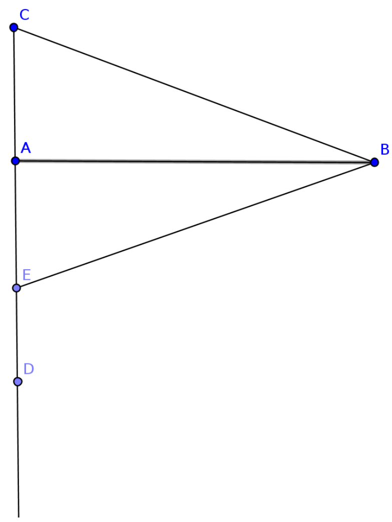
   Olkoon $\overline{AB}$ jana. Aksiooman 2 nojalla on piste C, joka ei ole janalla $\overline{AB}$. Aksiooman 10 nojalla löytyy yksikäsitteinen puolisuora $\overrightarrow{AD}$ eri puolelta suoraa AB kuin C siten, että $\angle ABC \cong \angle BAD$. Aksiooman 7 nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{AD}$ löytyy yksikäsitteinen piste E siten, että $\overline{AE} \cong \overline{BC}$. Pisteet C ja E ovat eri puolilla suoraa AB, joten $\overline{CE}$ leikkaa suoran AB, kutsutaan leikkauspistettä nimellä M.



Tarkastellaan kolmioita AEM ja BCM: $\angle AME \cong \angle BMC$ (ristikulmat, lause 1.4.5.) ja E löydettiin siten, että $\angle MAE = \angle BAD \cong \angle ABC = \angle MBC$ sekä $AE \cong BC$, joten lauseen 1.4.9. (kks) nojalla kolmiot ovat yhtenevät. Tästä seuraa, että $AM \cong BM$.

Piste M on pisteiden A ja B välissä. Vastaoletus: M ei ole pisteiden A ja B välissä. Jos pisteet A, B, M ovat erillisiä pisteitä, on joko $A \in \overline{BM}$ tai $B \in \overline{AM}$. Oletetaan näistä $B \in \overline{AM}$ (nimitysten mielivaltaisuuden vuoksi oletuksen valinta on epäoleellinen). Nyt siis A ja B ovat samalla puolella pistettä M. Aksiooman 7 nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{MA}$ löytyy yksikäsitteinen piste F siten, että $\overline{MF} \cong \overline{MA}$. Toisaalta $\overline{MA} \cong \overline{MA} \cong \overline{MB}$, joten $A = F = B$. RR (oletus pisteiden erillisyydestä), joten joko piste M on pisteiden A ja B välissä tai pisteet M, A, B eivät ole erillisiä.

Tehdään vielä vastaoletus pisteiden erillisyyden suhteen: $M = A$ tai $M = B$, oletetaan vaikkapa $M = A$ (epäoleellinen valinta). Nyt E löydettiin siten, että $\angle BAE \cong \angle ABC$. Toisaalta $\angle CAB$ on kulman BAE vieruskulma, joten lauseen 1.4.8. nojalla: $\angle ABC < \angle BAE$ RR, joten piste M on pisteiden A ja B välissä.



Näytetään vielä, että M on yksikäsitteinen. Oletetaan, että M' on pisteiden A ja B välissä ja $M' \neq M$. Nyt M' on joko pisteiden A, M tai B, M välissä (lause 1.2.3.). Oletetaan (taas nimitysten mielivaltaisuuden vuoksi yhdentekevästi), että M' on pisteiden A ja M välissä. Nyt janojen $<$ -relaation määritelmän mukaan $\overline{AM'} < \overline{AM}$. Toisaalta lauseen

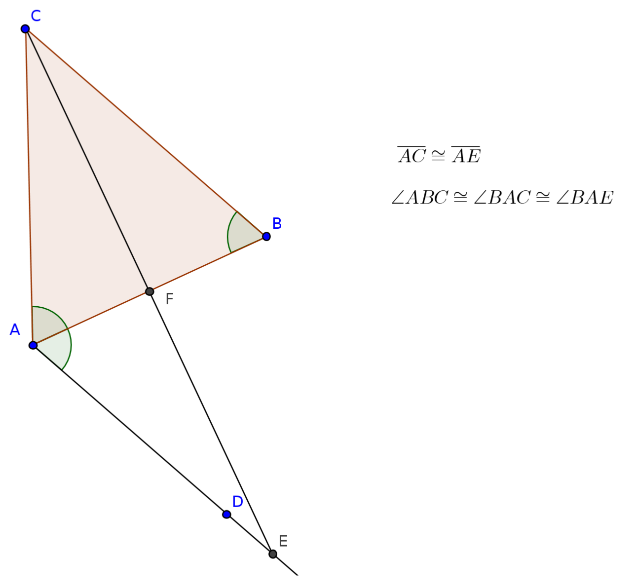
1.2.4. nojalla M on pisteiden M' ja B välissä, joten $\overline{MB} < \overline{M'B}$. Siis $\overline{AM'} < \overline{AM} \cong \overline{MB} < \overline{M'B}$. Pisteiden M ja B välistä siis löytyy piste F siten, että $\overline{BF} \cong \overline{MB}$, toisaalta $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ joten myös $\overline{AM} \cong \overline{BF}$, eli $\overline{AM} < \overline{M'B}$. Siis $\overline{AM'} < \overline{AM} < \overline{M'B}$, joten harjoituksen 1.4.2. nojalla $\overline{AM'} < \overline{M'B}$.

Siis pisteelle M' pätee $\overline{AM'} \neq \overline{M'B}$ (harjoitus 1.4.2.). $\square$

2. (Harjoitus 1.4.10., [L]) Kolmiossa ABC on $\angle CAB \cong \angle CBA$. Osoita, että $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Eräs ratkaisuehdotus.

Olkoon ABC kolmio ja $\angle CAB \cong \angle CBA$. Aksiooman 10 nojalla löytyy puolisuora $\overrightarrow{AD}$ eri puolelta suoraa AB kuin C siten, että $\angle BAD \cong \angle BAC$. Aksiooman 7 nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{AD}$ löydetään piste E siten, että $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.



Kolmioissa CAF ja EAF on $AF \cong AF$ ja $\angle CAF \cong \angle EAF$ sekä $\overline{AC} \cong \overline{AE}$, joten lauseen 1.4.2. (sks) perusteella kolmiot ovat yhtenevät.

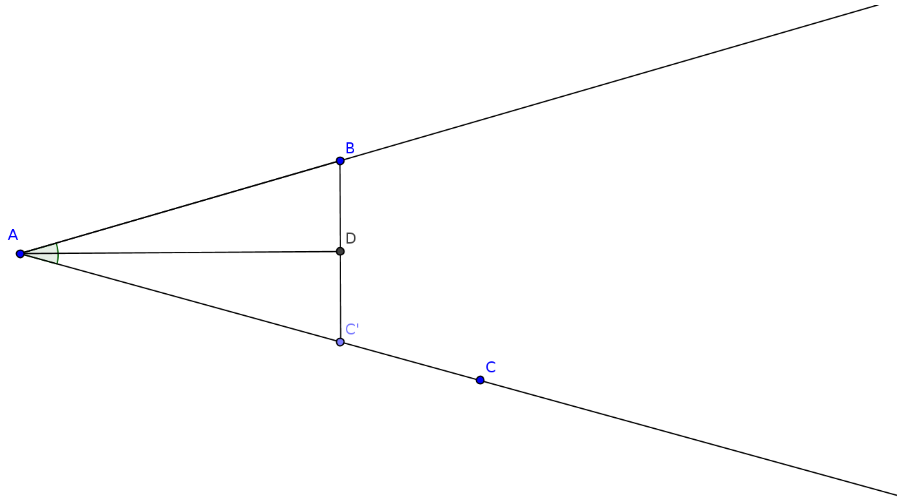
Myös kolmioista CBF ja EAF nähdään, että $\angle EAF \cong \angle CBF$ (puolisuoran $\overrightarrow{AD}$ valinta ja oletus), $\angle EFA \cong \angle CFB$ (ristikulmat, lause 1.4.5.) ja $\overline{EF} \cong \overline{CF}$ (äsken todetusta kolmioiden CAF ja EAF yhtenevyydestä), joten lauseen 1.4.9. (kks) nojalla kolmiot ovat yhtenevät.

Kolmioiden yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio (ja siis etenkin transitiivinen relaatio), joten saadaan $\triangle CAF \cong \triangle CBF$ ja siitä $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

□

3. (Harjoitus 1.4.13., [L]) Osoita, että kulma voidaan puolittaa, ts. että $\angle BAC$:n aukeamassa on piste D siten, että $\angle BAD \cong \angle DAC$. *Ratkaisuehdotus.*

   Olkoon BAC kulma. Aksiooman 7 nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{AC}$ löytyy yksikäsitteinen piste C' siten, että $\overline{AC'} \cong \overline{AB}$. Tehtävän 1. nojalla on yksikäsitteinen $D \in \overline{BC'}$ siten, että $\overline{C'D} \cong \overline{DB}$. Nyt kolmiossa $BC'A$ on $\overline{AB} \cong \overline{AC'}$, joten lauseen 1.4.10. nojalla $\angle ABC' \cong \angle AC'B$.



   Kolmiolle ABD ja $AC'D$ pätee siis $\overline{AB} \cong \overline{AC'}$, $\angle ABC' \cong \angle AC'B$ ja $\overline{BD} \cong \overline{C'D}$, joten lauseen 1.4.2. (sks) nojalla kolmiot ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\angle BAD \cong \angle C'AD = \angle CAD$. □

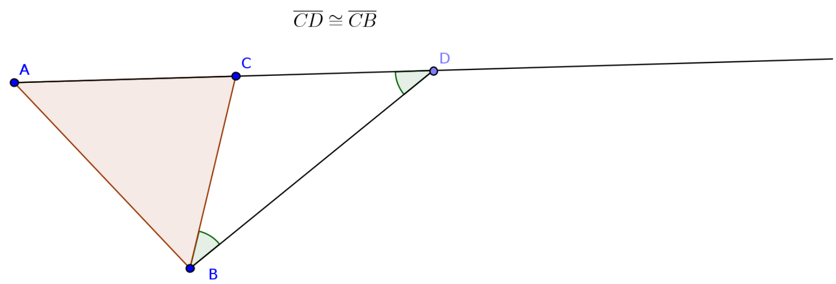
4. (Harjoitus 1.4.15., [L]) Todista *kolmioepäyhtälö*, eli että kolmiossa sivu on aina pienempi kuin kahden muun sivun summa.

   Ratkaisuehdotus.

   Olkoon ABC kolmio. Kulmien nimeämisen mielivaltaisuuden (ts. tilanteen symmetrisyyden) vuoksi ei ole väliä, minkä sivuista näytämme olevan kahden muun summaa pienempi.

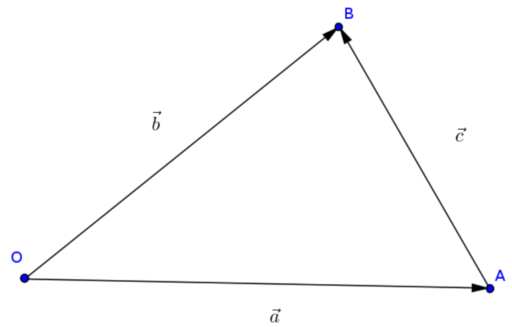
   Aksiooman 7 nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{AC}$ löytyy D siten, että $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Kolmiossa CDB on janojen yhteenlaskun määritelmän nojalla $\overline{CD} \cong \overline{CB}$ ja siten lauseen 1.4.10. nojalla $\angle CDB \cong \angle CBD$. Piste C on pisteiden A ja D välissä, joten C ja siten $\overrightarrow{BC}$ on kulman

ABD aukeamassa. Kulmien $<$ -relaation määritelmän nojalla on silloin siis $\angle CBD < \angle ABD$. Nyt $\angle CDB \cong \angle CBD < \angle ABD$, joten harjoituksen 1.4.3. nojalla $\angle CDB < \angle ABD$. Lauseen 1.4.14. nojalla kolmiossa pienempää kulmaa vastaa pienempi sivu, joten saadaan $\overline{AB} < \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CB}$. $\square$



5. (YO-tehtävä, S2008) Vektorit $\overrightarrow{OA} = \bar{a}\ (\neq \bar{0})$ ja $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ toteuttavat ehdon $\bar{a} \cdot \bar{a} = 2\bar{a} \cdot \bar{b}$. Osoita, että kolmio OAB on tasakylkinen.

   Eräs ratkaisu.



Kolmion kolmas sivu on $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$.

$$
\begin{aligned}
|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\
&= \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\
&= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\
&= \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

Siis $|\vec{c}| = |\vec{b}|$, joten kolmion OAB sivut AB ja OB ovat yhtä pitkät. Siis kolmio OAB on tasakylkinen. □

6. (YO-tehtävä, K2011) Osa Helsingin Keskuskatua muutettiin kävelykaduksi ja päällystettiin Penrosen laatoilla, jotka keksi englantilainen matemaatikko Roger Penrose 1970-luvulla. Niiden avulla taso voidaan laatoittaa äärettömän monella eri tavalla niin, ettei laatoitus ole jaksollinen. Laattoja on kahta eri muotoa, leija ja nuoli. Molemmat ovat nelikulmioita, joiden kulmien suuruudet ja osa sivujen pituuksista on merkitty kuvioon.

   a) Laske muiden sivujen pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

   b) Laske laattojen pinta-alojen likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

Eräs ratkaisu.

Symmetrian perusteella lävistäjät jakavat molemmat nelikulmiot yhteneviin kolmioihin, joten lävistäjät myös puolittavat nelikulmioiden kulmat. Lisäksi tuntemattomat sivut ovat yhtä pitkät.

a) Sinilauseella sadaan:

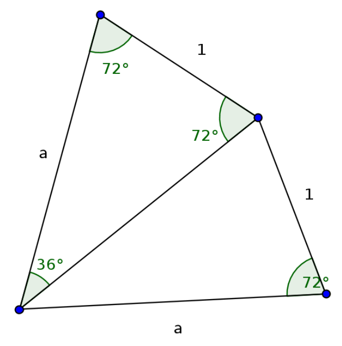
$$
\frac{1}{\sin 36 \cos} = \frac{a}{\sin 72^\circ} \qquad | \cdot \sin 72^\circ
$$

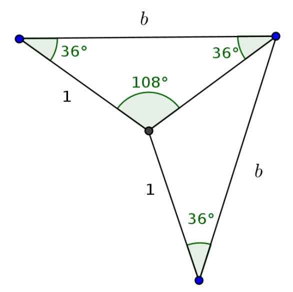
$$
a = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 1,61803\cdots \approx 1,618
$$

ja:

$$
\frac{1}{\sin 36^\circ} = \frac{b}{\sin 108^\circ} \qquad | \cdot \sin 108 \cos
$$

$$
b = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = 1,61803\cdots \approx 1,618
$$





b) Kolmion pinta-alan trigonometrisella kaavalla $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ saadaan:

Leijan pinta-ala $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 \cdot \sin 72° = 1,53884\cdots \approx 1,539$

Nuolen pinta-ala $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot 1 \cdot \sin 36° = 0,95105\cdots \approx 0,951$

7.* Palataan edellisten harjoitusten tähtitehtävässä esiteltyyn $\mathbb{F}$-malliin. $\mathbb{F}$-mallissa ”taso” oli jonkin (euklidisen) ympyrän ω rajaama avoin kiekko ja ”suorina” kaikki ne puoliellipsit, joiden isoakselina on jokin ympyrän ω halkaisija, mukaanlukien ympyrän ω kaikki halkaisijat (rajatapauksena, ts. tapaukset, joissa ellipsin pikkuakseli on ”nolla”). $\mathbb{F}$-mallissa pisteitä ovat kaikki kiekon pisteet. Löydätkö ”suorat kulmat” ja ”yhdensuuntaiset suorat” $\mathbb{F}$-mallista?

Ratkaisu. ”Yhdensuuntaisia suoria” $\mathbb{F}$-mallissa ovat kaikki ne puoliellipsit, joilla on sama isoakseli (= jokin ympyrän halkaisija) mukaanlukien kyseinen isoakseli. Näillä puoliellipseillä (tai rajatapauksena isoakselilla) ei ole yhteisiä pisteitä (elleivät ole sama puoliellipsi) ympyrässä, sillä ympyrä ω on avoin. Koska yhdensuuntaisuus on ekvivalenssirelaatio ja samakohtaiset kulmat omat yhtä suuret, kun leikattavat suorat ovat yhdensuuntaisia, niin riittää tarkastella vain näiden ekvivalenssiluokkien edustajia. Valitaan kunkin keskenään yhdensuuntaisten suorien edustajiksi ympyrän halkaisija, joka on isoakselina kaikille ko. luokan ”suorille” (eli puoliellipseille). Nähdään, että niiden puoliellipsien, joiden isoakselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, leikkauskulmat ovat "suoria kulmia".