MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 2
Ratkaisuehdotuksia

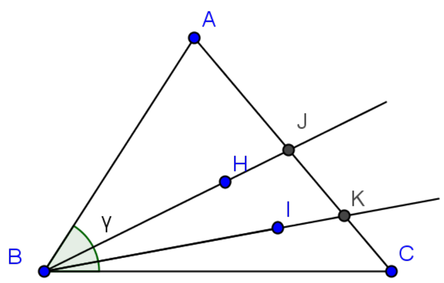
1. (Harjoitus 1.4.1., [L]) Osoita, että jos $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ja $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, niin $\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$.

   Ratkaisu. Janojen yhteenlaskun määritelmän mukaan $\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{AE}$, missä B on pisteiden A ja E välissä ja $\overline{BE} \cong \overline{CD}$. Vastaavasti on $\overline{A'B'} + \overline{C'D'} = \overline{A'E'}$, missä B' on pisteiden A' ja E' välissä ja $\overline{B'E'} \cong \overline{C'D'}$. Koska $\overline{CD} \cong \overline{BE}$ ja $\overline{C'D'} \cong \overline{B'E'}$, aksioomasta 8 seuraa $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$. Nyt siis $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$ ja $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, joten aksiooman 9 nojalla $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$. $\square$

2. (Harjoitus 1.4.4., [L]) Todista: jos $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$, niin $\alpha < \gamma$.

   Ratkaisu.

Kuva 1: Kuva tehtävään 2.



Olkoon $\gamma = \angle ABC$. Koska $\beta < \gamma$, löytyy $<$ -relaation määritelmän mukaan puolisuora $\overrightarrow{BH}$ kulman $\angle ABC$ aukeamasta siten, että $\angle HBC \cong \beta$.

Koska $\alpha < \beta$, $\beta \cong \angle HBC$ ja $\alpha \cong \alpha$, luennolla todistetun harjoituksen [L] 1.4.3. mukaan on $\alpha < \angle HBC$. Kulman $\angle HBC$ aukeamasta löytyy silloin $<$ -relaation määritelmän mukaan puolisuora $\overrightarrow{BI}$ siten, että $\angle IBC \cong \alpha$.

Näytetään, että $\overrightarrow{BI}$ on kulman $\angle ABC$ aukeamassa.

Koska H on kulman $\angle ABC$ aukemassa, lauseen 1.3.2. mukaan puolisuora $\overrightarrow{BH}$ leikkaa janan $\overline{AC}$ jossakin pisteessä J. Puolisuorat $\overrightarrow{BH}$ ja $\overrightarrow{BJ}$ ovat samat (puolisuoran määritelmä, $J \in \overrightarrow{BH}$, $J \neq B$), joten kulma $\angle HBC = \angle JBC$. Koska I on kulman $\angle JBC$ aukemassa, lauseen 1.3.2. mukaan puolisuora $\overrightarrow{BI}$ leikkaa janan $\overline{JC}$ jossakin pisteessä K.

Pisteet A, C, J, K ovat samalla suoralla, lisäksi K on pisteiden J, C välissä ja J on pisteiden A, C välissä, joten lauseen [L] 1.2.3. nojalla on K pisteiden A, C välissä. Piste K on siis samalla puolella suoraa BA kuin C ja samalla puolella suoraa BC kuin A, eli kulman $\angle ABC$ aukeamassa.

Nyt myös piste I on samalla puolella suoraa AB pisteen K kanssa ja siten kulman $\angle ABC$ aukeamassa. (Vastaoletus: I ei ole kulman ABC aukeamassa. Silloin se on eri puolella suoraa AB kuin K, eli $\overline{IK}$ leikkaa suoran AB. Kuitenkin $B \in IK$ ja $C \in AK$, joten aksioomasta 1 seuraa $AB = BC$. RR, sillä $\angle ABC = \gamma$ on kulma.)

Nyt siis $\overrightarrow{BI}$ on kulman γ aukeamassa ja $\angle IBC \cong \alpha$, joten $<$ -relaation määritelmän mukaan $\alpha < \gamma$. $\square$

3. (Harjoitus 1.4.5., [L]) Todista: jos α ja β ovat kulmia, niin seuraavista vaihtoehdoista yksi ja vain yksi on tosi: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha \cong \beta$.

   Ratkaisu. Olkoot α, β kulmia, $\alpha = \angle ABC$. Aksiooman 10 nojalla löytyy samalta puolelta suoraa BC pisteen A kanssa piste D siten, että $\angle DBC \cong \beta$.

   Jos $D \in \overrightarrow{BA}$, on $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ ja siten $\angle ABC = \angle DBC$ ja $\alpha \cong \beta$. (Toisaalta aksiooman 10 nojalla puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on yksikäsitteinen, joten ei päde $\beta < \alpha$ eikä $\alpha < \beta$.)

   Jos $D \notin \overrightarrow{BA}$, niin $D \notin AB$ (sillä D samalla puolen suoraa BC, kuin A), joten D väistämättä jommassa kummassa suoran AB määräämistä puolitasoista (ne muodostavat *osituksen* suoraan kuulumattomien pisteiden joukolle).

Jos D on samalla puolella suoraa AB kuin C (ja oletuksen mukaan samalla puolella suoraa BC kuin A), on silloin $\overrightarrow{BD}$ kulman $\angle ABC$ aukeamassa ja $<$ -relaation määritelmän mukaan $\beta < \alpha$. Lisäksi A ja C ovat eri puolilla yksikäsitteistä (aksiooma 10) suoraa BD, joten $\overrightarrow{BA}$ ei ole kulman $\angle DBC$ aukeamassa eikä siis päde $\alpha < \beta$. Vielä $\overrightarrow{BA}$ on yksikäsitteinen (aksiooma 10) ja $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{BD}$, joten $\angle ABC \neq \angle DBC$ ja aksiooman 11 nojalla ei päde $\alpha \cong \beta$.

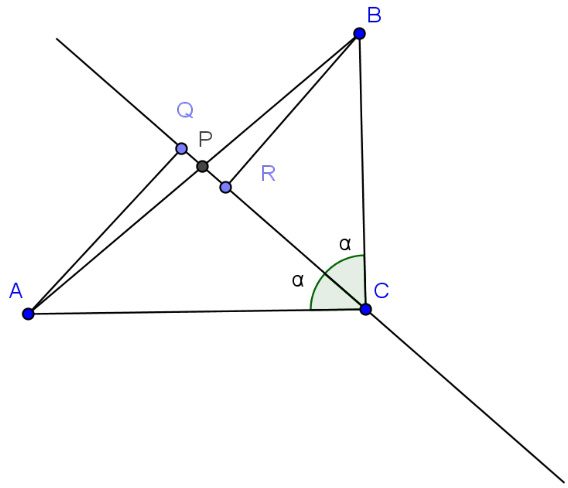
Jos taas D on eri puolella suoraa AB kuin C, on A samalla puolella suoraa DB kuin C, joten $\overrightarrow{BA}$ on kulman DBC aukeamassa ja vastaavasti kuin yllä pätee $\alpha < \angle DBC$ ja vastaavasti kuin yllä ei päde $\alpha \cong \angle DBC$ eikä $\angle DBC < \alpha$. Nyt aksiooman 11 nojalla ei päde $\alpha \cong \beta$. Lisäksi vielä $\alpha \cong \alpha$ ja $\angle DBC \cong \beta$, joten luennolla käydyn harjoituksen [L] 1.4.3. nojalla pätee $\alpha < \beta$ mutta ei $\beta < \alpha$.

$\square$

4. Todista laskuharjoituksissa 1 esiintynyt *kulmanpuolittajalause*: Oletetaan, että kolmion ABC kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä P. Osoita, että $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC}$.

Ratkaisu.

Kuva 2: Kuva tehtävään 4.



Jatketaan kulmanpuolittaja suoraksi ja piirretään sille kolmion kärjistä A ja B normaalit. Merkitään kärjestä A lähtevän normaalin ja kulmanpuolittajan leikkauspistettä Q ja kärjestä B lähtevän normaalin ja kulmanpuolittajan leikkauspistettä R. Huomataan, että kolmioilla ACQ ja RCB on kaksi samaa kulmaa; puolikas kulmasta C ja suora kulma, joten myös kolmannet kulmat ovat samat ja siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Samoin kolmioilla APQ ja BPR on kaksi yhteistä kulmaa, suorat kulmat ja ristikulmat pisteessä P, joten myös nämä kolmiot ovat *yhdenmuotoiset* (mutta ei välttämättä *yhtenevät*).

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastaavien sivujen suhteet ovat samat, joten kolmioista ACQ ja RCB saadaan $\frac{AC}{CB} = \frac{AQ}{RB}$. Samoin kolmioista APQ ja BPR saadaan $\frac{AQ}{RB} = \frac{AP}{BP}$. Yhdistämällä nämä seuraa haluttu tulos, $\frac{AC}{CB} = \frac{AQ}{RB} = \frac{AP}{BP}$. $\square$

5. i) Miten Vektorit-kurssilla (MAA5) käytettiin vektoreiden pistetuloa hyväksi kulman laskemisessa? Miten se liittyy Geometria-kurssilla (MAA3) esiteltyyn kosinilauseeseen?

ii) (YO-tehtävä, S2007) Kolmiossa ABC on vektori $\overline{AB} = 2,2\bar{i}+7,3\bar{j}$ ja $\overline{AC} = 5,9\bar{i} - 2,1\bar{j}$.

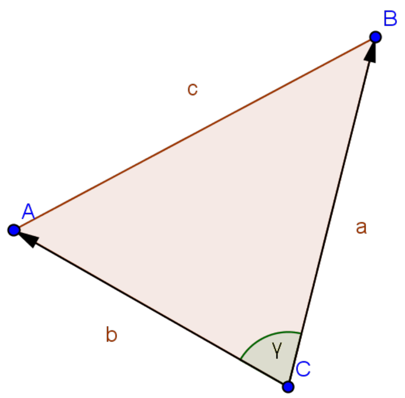
a) Määritä kolmanteen sivuun liittyvä vektori $\overline{BC}$.

b) Osoita, että BC on kolmion pisin sivu.

c) Määritä kulman BAC suuruus pistetulon avulla $0,1$ asteen tarkkuudella.

Ratkaisu.

Kuva 3: Kuva tehtävään 5. a)



i) Olkoon vektori $\bar{a} = \overline{CB}$ ja vektori $\bar{b} = \overline{CA}$ (ks. Kuva **??**). Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{a}$ välinen kulma γ saadaan laskettua seuraavan kaavan avulla:

$$\cos\gamma = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Merkitään $|\bar{a}| = a$ ja $|\bar{b}| = b$. Toisaalta, kosinilausetta käyttämällä kulman γ kosini saadaan kaavalla

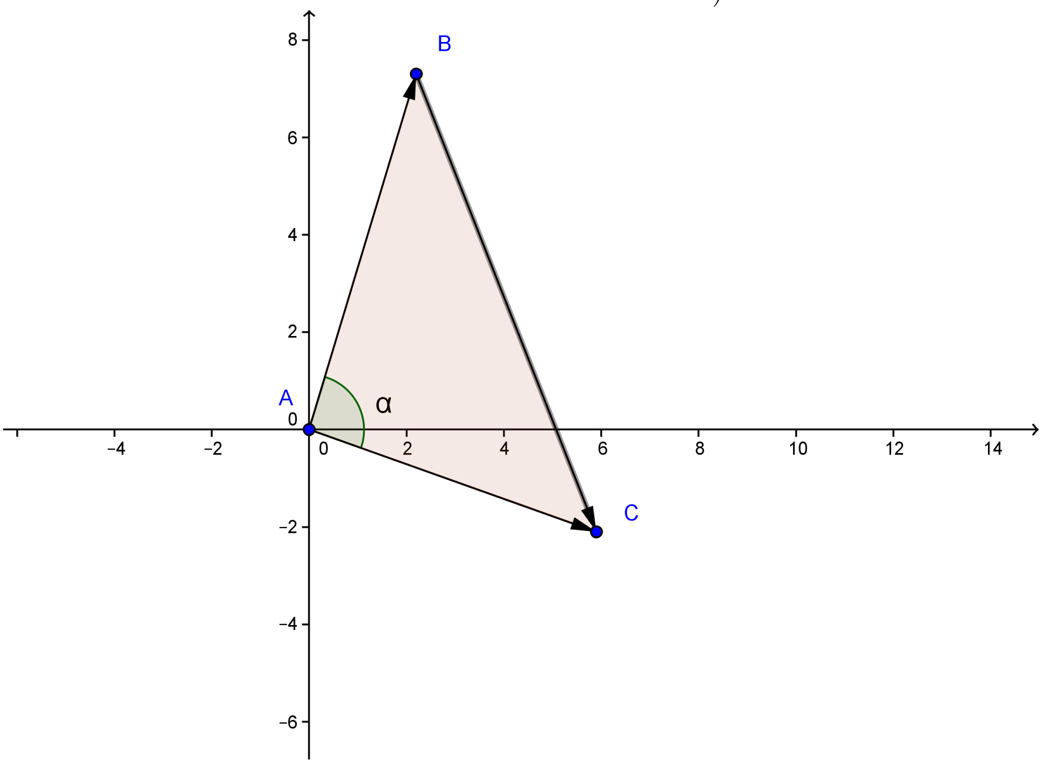
$$\cos\gamma = -\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab}.$$

Kirjoitetaan $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j}$ ja $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j}$, jolloin $\bar{c} := \overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1)\bar{i} + (a_2 - b_2)\bar{j}$. Nyt $a^2 = a_1^2 + a_2^2$, $b^2 = b_1^2 + b_2^2$ ja $c^2 := |\bar{c}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab} = \frac{-(a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}{2ab} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{ab} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.\end{aligned}$$

ii) Piirretään aluksi kolmiosta ABC mallikuva koordinaatistoon siten, että piste A on origossa (Kuva 5).

Kuva 4: Kuva tehtävään 5. b)



a) Koska vektori $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$, on

$$\overline{BC} = (5,9 - 22,2)\bar{i} + (-2,1 - 7,3)\bar{j} = 3,7\bar{i} - 9,4\bar{j}.$$

b) ratkaisua varten on määritettävä kaikkien sivujen pituudet. Ne saadaan sivuvektorien pituuksina.

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{2,2^2 + 7,3^2} = \sqrt{58,13} \approx 7,624 \\ |\overline{AC}| &= \sqrt{5,9^2 + 2,1^2} = \sqrt{39,22} \approx 6,263 \\ |\overline{BC}| &= \sqrt{3,7^2 + 9,4^2} = \sqrt{102,05} \approx 10,102. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että

$$|\overline{BC}| > |\overline{AB}| > |\overline{AC}|,$$

joten BC on kolmion pisin sivu.

c) Kulman $\alpha = \angle BAC$ kosinille saadaan pistetulosta lauseke

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{2,2 \cdot 5,9 + 7,3 \cdot (-2,1)}{\sqrt{58,13}\sqrt{39,22}} \approx -0,049216.$$

Näin ollen $\angle BAC \approx 92,82106 \approx 92,8°$.

6. (YO-tehtävä, K2012) Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1. Jatkamalla näin saadaan päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, \ldots$. Laske ympyröiden pinta-alojen summa. (Piirrä ensin kuva!)

Ratkaisu.

Tehtävän suoritus perustuu olennaisesti kahden tuloksen jatkuvaan käyttöön.

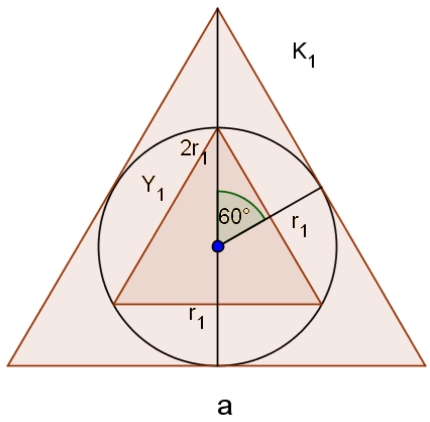
Tulos I. Jos tasasivuisen kolmion K sivu on a, on sen sisään asetetun, kylkiä sivuavan ympyrän Y säde $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Perustelu. Piirtämällä ympyrälle Y säde r kohtisuoraan K:n kylkeä vastaan saadaan suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on r ja K:n korkeusjanalla oleva hypotenuusa $2r$. Näin ollen K:n korkeusjanan pituus on $3r$. Toisaalta, K:n korkeusjanan pituus on $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, joten

$$3r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Tulos II. Jos ympyrän Y säde on r, on sen sisään asetetun tasasivuisen kolmion K, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä, sivu $r\sqrt{3}$.

Kuva 5: Kuva 1 tehtävään 6.



Perustelu. Piirretään Y:n keskipisteestä säde kolmion K huippuun ja jana kohtisuoraan K:n kylkeä vastaan. Saadaan oheisen kuvan mukainen kolmio, jonka hypotenuusa on r ja lyhyempi kateetti $\frac{1}{2}r$. Pidempi kateetti on $\frac{\sqrt{3}}{2}r$. Tästä saadaan, että kolmion K sivun pituus

$$a = 2\frac{\sqrt{3}}{2}r = r\sqrt{3}.$$

Tarkastellaan sitten tehtävän konstruktiota.

Kolmion K_1 sivu on a. Tuloksen I mukaan sen sisään asetetun ympyrän Y_1 säde on

$$r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Ympyrän Y_1 sisään asetetun tasasivuisen kolmion K_2 sivu on tuloksen II mukaan

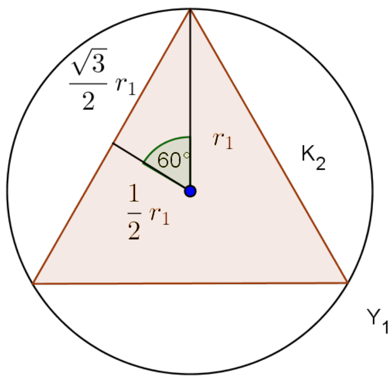
$$a_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r_1 = r_1\sqrt{3}.$$

Kolmion K_2 sisään asetetun ympyrän Y_2 säde on tuloksen I ja edellisen vaiheen mukaan

$$r_2 = \frac{a_2}{2\sqrt{3}} = \frac{r_1\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r_1.$$

Siis ympyrän Y_2 säde on puolet Y_1:n säteestä.

Kuva 6: Kuva 2 tehtävään 6.



Tarkastellaan sitten kolmioita K_2 ja K_3 sekä niiden sisällä olevia ympyröitä Y_2 ja Y_3. Näihin voidaan suorittaa sama päättely kuin edellä vaihtamalla vain indeksit yhtä suuremmaksi. Tuloskin on sama, Y_3:n säde r_3 on puolet Y_2:n säteestä. Näin ollen

$$r_3 = \frac{1}{2}r_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_1.$$

Tästä voidaan päätellä, että säde puolittuu aina siirryttäessa ympyrästä Y_n ympyrään Y_{n+1}. Ympyröiden Y_n säteet muodostavat siten geometrisen jonon

$$r_1, \frac{1}{2}r_1, \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_1, \left(\frac{1}{2}\right)^3 r_1, \ldots$$

Myös ympyröiden Y_n pinta-alat muodostavat geometrisen jonon

$$\pi r_1^2, \pi\frac{1}{4}r_1^2, \pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 r_1^2, \pi\left(\frac{1}{4}\right)^3 r_1^2, \ldots,$$

jonka suhdeluvulle $\frac{1}{4}$ pätee $0 < \frac{1}{4} < 1$. Ympyröiden pinta-alojen summa on suppeneva geometrinen sarja, jolle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 = \pi r_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \pi r_1^2 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \pi \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} = \pi \frac{a^2}{9}.$$

Pinta-alojen summa on $\pi \frac{a^2}{9}$.

7.* Tutut pisteet ja suorat tasossa ovat vain yksi tapa visualisoida Euklidista geometriaa. Tarkastellaan erästä Euklidisen geometrian mallia, kutsuttakoon sitä malliksi $\mathbb{F}$. Olkoon ω jokin ympyrä tasossa. Määritellään $\mathbb{F}$-mallissa ”tasoksi” ympyrän ω rajaama avoin kiekko. ”Suorina” taas ovat kaikki ne puoliellipsit, joiden isoakselina on jokin ympyrän ω halkaisija, mukaanlukien ympyrän ω kaikki halkaisijat (rajatapauksena, ts. tapaukset, joissa ellipsin pikkuakseli on ”nolla”). $\mathbb{F}$-mallissa pisteitä ovat kaikki kiekon pisteet.

a) Piirrä kuva $\mathbb{F}$-mallin tasosta, jossa on muutamia $\mathbb{F}$-mallin suoria.

b) Pohdi mitä tähän mennessä käydyt aksioomat tarkoittavat tässä mallissa.

Ratkaisu. Käy juttelemassa luennoitsijan kanssa, jos haluat tietää lisää tästä mallista!