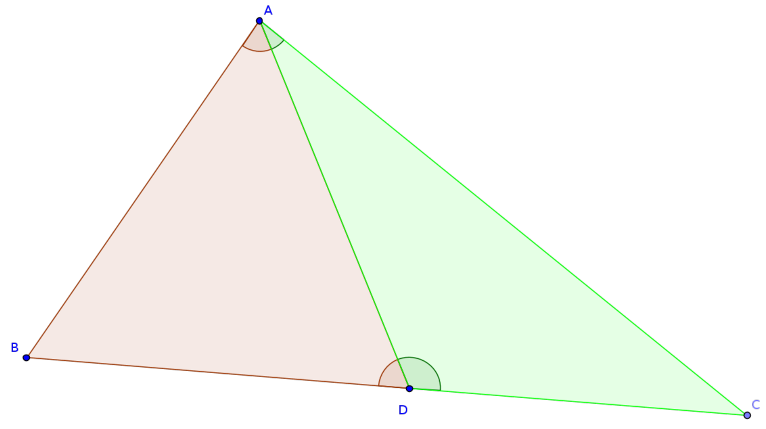
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Ratkaisuehdotuksia harjoituksiin 11

1. (Harjoitus 8.1.1., [L]) Kolmion ABC *kulmavaje* $\delta(ABC)$ on luku $180° -$ kolmion kulmasumma. Olkoon D sivun $\overline{BC}$ piste. Osoita, että $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(ADC)$.

   Ratkaisu. Kolmion ABC kulmavaje on siis määritelmän mukaan $180° - (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB)$.

   Nähdään, että $\angle ABC = \angle ABD$, $\angle BCA = \angle DCA$ ja $\angle CAB = \angle BAD + \angle DAC$. Lisäksi $\angle ADB$ ja $\angle ADC$ ovat vieruskulmia, joten $\angle ADB + \angle ADC = 180°$.



Saadaan siis

$$\begin{aligned}
&\delta(ABC)\\
&= 180° - (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB)\\
&= 180° - (\angle ABD + \angle DCA + \angle BAD + \angle DAC)\\
&= 180° - (\angle ABD + \angle DCA + \angle BAD + \angle DAC) + (180° - (\angle ADB + \angle ADC))\\
&= 180° - (\angle ABD + \angle ADB + \angle BAD) + 180° - (\angle DCA + \angle ADC + \angle DAC)
\end{aligned}$$

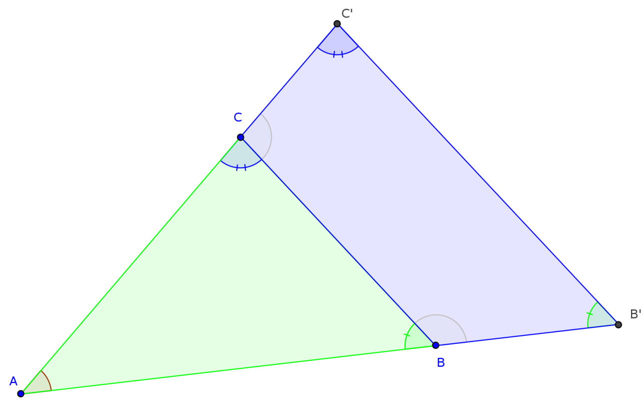
$$= \delta(ABD) + \delta(ADC).$$

$\square$

2. (Harjoitus 8.1.2., [L]) Osoita, että hyperbolisessa ja elliptisessä geometriassa kaksi kolmiota, joilla on samat kulmat, ovat yhteneviä. (Tämä siis tarkoittaa, että yhdenmuotoiset kolmiot ovat yhteneviä ko. geometrioissa!)

   Ratkaisuehdotus. Olkoon ABC ja $A'B'C'$ kaksi kolmiota, joissa on yhtenevät kulmat. Voidaan olettaa, että $A = A'$ ja että $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$ sekä $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.

   Oletuksen mukaan $\angle ABC = \angle AB'C'$, joten lauseen 1.5.1. nojalla ovat BC ja $B'C'$ yhdensuuntaiset. Nyt siis joko $B = B'$ ja $C = C'$, tai sitten B' ja C' ovat samalla puolella suoraa BC. Oletetaan vastaoletuksena jäljempi.



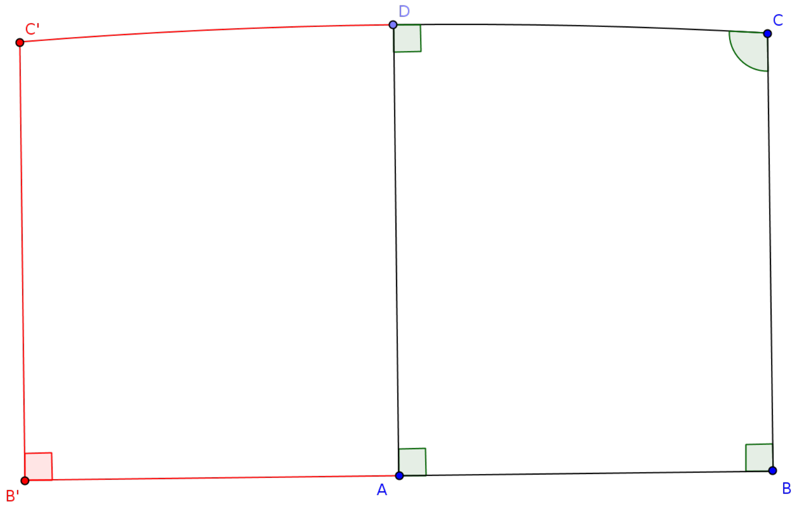
   Nelikulmiossa $BB'C'C$ on vieruskulmien $\angle CBB'$ ja $\angle BB'C'$ summa $180°$, samoin vieruskulmien $\angle B'C'C$ $\angle C'CB$ summa. Nelikulmion kulmien summa on siis $180° + 180° = 360°$.

   Toisaalta nelikulmion kulmien summa on myös kolmioiden $BC'C$ ja $BB'C'$ kulmien kulmien summa, eli $360° - \delta(BC'C) - \delta(BB'C') \neq 360°$: ristiriita. Siten on $B = B'$ ja $C = C'$ ja siten kolmiot yhtenevät. $\square$

3. (Harjoitus 8.1.3., [L]) Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jossa kulmat $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle D$ ovat suoria. Osoita, että kulma $\angle C$ on terävä, suora tai tylppä sen mukaan, vallitseeko geometriassa terävän, suoran vai tylpän kulman hypoteesi. (Ko. nelikulmiota kutsutaan Lambertin nelikulmioksi!)

   Ratkaisuehdotus.

   Peilataan Lambertin nelikulmio suoran AD yli, merkitään pisteen B kuvaa B' ja pisteen C kuvaa C'. Peilaus kuvaa janat yhteneville janoille ja kulmat yhteneville kulmille, joten $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ja suorat kulmat $\angle CBB' = \angle CBA \cong \angle C'B'A' = \angle C'B'A = \angle C'B'B$. Nelikulmio $AA'D'D$ on siis Saccherin nelikulmio.

   Saccherin nelikulmion yläkulma $\angle C$ on suora, terävä tai tylppä sen mukaan, toteuttaako geometria suoran, terävän vai tylpän kulman hypoteesin. $\square$

4. (Harjoitus 8.1.4., [L]) Esimerkkinä epäeuklidisesta geometriasta esitetään usein palloa. Tässä geometriassa suoria ovat pallon isoympyrät (eli ne ympyrät pallopinnalla, joiden halkaisija kulkee pallon keskipisteen kautta). Selitä miksi paralleeliaksiooma ei päde tässä mallissa. Mitkä muut aksioomat kuin paralleeliaksiooma eivät päde tallaisessa mallissa?

   Ratkaisuluonnostelma. Kaksi pallon eri isoympyrää leikkaavat toisensa aina kahdesti. Pallopinnan suoralle ei siis ole olemassa sen kanssa yhdensuuntaista suoraa, joka ei olisi suora itse.

Playfairin muotoilu paralleeliaksiomasta siis toteutuu pallon pinnalla. Voidaan kuitenkin miettiä aksioomaa 13 (Playfair) yhdessä lauseen 1.5.1. kanssa (vrt. [L] luvun 8.1 alun huomautus). Suora seuraus lauseesta 1.5.1. on, että kunkin annetulle suoralle kuulumattoman pisteen kautta kulkee ainakin yksi tuon suoran kanssa yhdensuuntainen suora. Lause yhdessä aksiooman 13 kanssa siis sanoo, että kunkin pisteen kautta kulkee yksi ja vain yksi annetun suoran kanssa yhdensuuntainen suora. Tämä ei selvästikään päde pallopinnalla.

Aksiooma 1 ei toteudu pallopinnalla: Pallon vastakkaisilla puolilla olevien pisteiden kautta voidaan selvästi piirtää useampia suoria (ajattele Maapallon napoja ja pituuspiirejä).

Myös aksioomat 3,4 ja 5 ovat pallopinnalla ongelmallisia: aksioomien 3 ja 4 avulla määritelty *välissä*-relaatio ei sellaisenaan ole pallopinnalla mielekäs, mikä näkyy siinä, ettei aksiooma 5 toteudu pallopinnan geometriassa. Ongelmat *välissä*-relaation määrittelyssä vaikuttavat väistämättä edelleen janojen määritelmään, puolisuoran määritelmään ja niin edelleen, ja sitä kautta edellyttäisivät useimpien myöhempien aksioomien muotoilun tarkentamista.

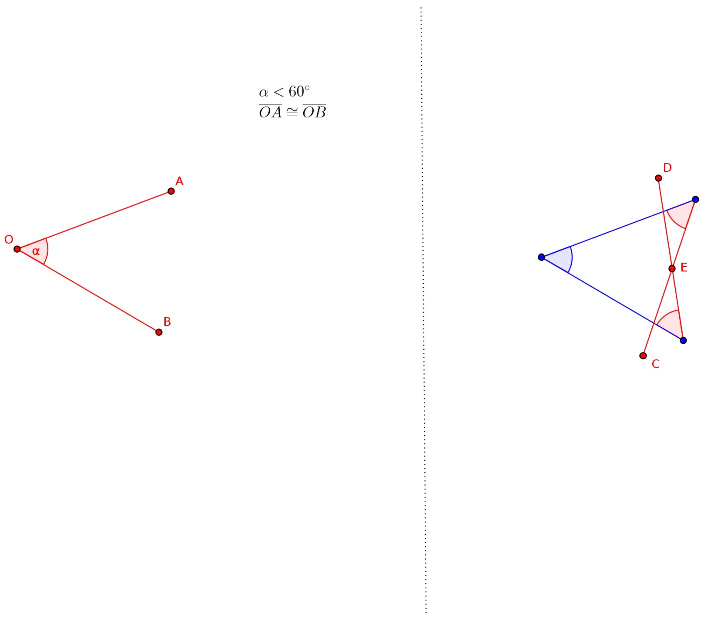
Huom! Toisin kuin muut tarkastelemamme epäeuklidisten geometrioiden esimerkit, pallopinnan geometria ei ole *neutraaligeometria*, siis muuten euklidinen geometria, josta paralleeliaksiooma on poistettu. Pallopinnan geometrian erot kurssin alkupuolen euklidiseen geometriaan nähden ovat äskeisen tarkastelun perusteella huomattavasti laaja-alaisemmat.

5. (Harjoitus 8.2.2., [L]) Osoita, että kaikilla $\alpha < 60°$ Poincarén geometriassa on tasasivuisia kolmioita, joiden kulmat ovat α:n suuruisia.

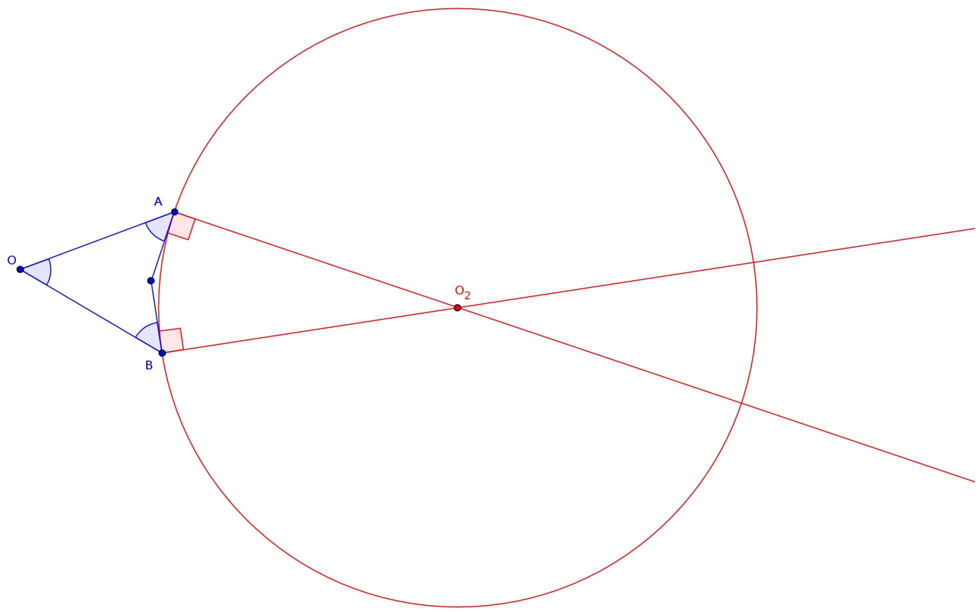
Ratkaisu.

Olkoon $\alpha < 60°$. Konstruioidaan Poincarén geometrian kolmio, jonka kaikki kulmat ovat α. Harjoituksen 1.4.10 mukaan kolmio on silloin myös tasasivuinen.

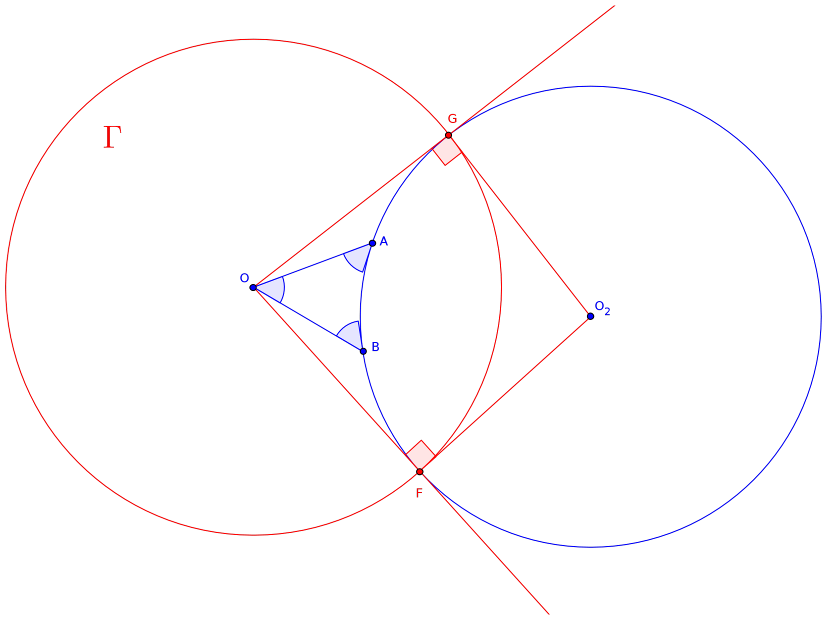
Olkoon O (tavanomaisen euklidisen geometrian tason) piste. Muodostetaan kulma $\angle AOB \cong \alpha$ siten, että $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. Muodostetaan sitten kulmat $\angle OAC \cong \alpha$ ja $\angle OBD \cong \alpha$. Koska $\alpha < 60°$, leikkaavat $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ kolmion AOB sisäpuolella pisteessä E.



Suorien EA ja EB pisteisiin A ja B piirretyt normaalit leikkaavat pisteessä O_2. Nyt siis suorat EA ja EB ovat tangentteja O_2-keskiselle, $\overline{AO_2}$-säteiselle ympyrälle Γ_{O_2}. Kyseinen ympyrä siis leikkaa suorat OA ja OB samoissa kulmissa kuin EA ja EB, eli kulmissa α ja α.



Olkoot pisteen O kautta kulkevan ympyrän Γ_{O_2} tangentin sivuamispiste ympyrällä F. Nyt O-keskinen, $\overline{OF}$-säteinen ympyrä Γ leikkaa ympyrää Γ_{O_2} kohtisuorasti.



Tähän asti olemme siis toimineet euklidisen geometrian tasossa. Siirretään konstruktio nyt Poincarén geometriaan. Otetaan Poincarén mallimme tasoksi ympyrän Γ sisäpisteet. (Jos mallin ympyräksi kuitenkin haluttaisiin jokin toinen ympyrä, voitaisiin Γ ongelmitta siirtää tuolle ympyrälle homotetialla (kts. Harjoitusten 10 tehtävä 1)). Nyt siis mallin pisteitä ovat ympyrän Γ sisäpisteet. Mallin suoria, P-suoria, ovat ympyrän Γ sisäpuolelle jäävät osat pisteen O kautta kulkevista suorista sekä ympyröistä, jotka leikkaavat ympyrän Γ kohtisuorasti.

Nyt siis janat $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ ovat P-suorilla OA ja OB ja ovat siten P-janoja. Samoin on pisteiden A ja B väliin jäävä ympyrän Γ_{O_2} kaari osa sitä P-suoraa, jonka kantaja Γ_{O_2} on, joten sekin on P-jana.

P-kolmiossa AOB on siis kolme kulman α kanssa yhtenevää kulmaa.

Muuttamalla konstruktiossa kulman α kylkiä saadaan lisää halutunlaisia kolmioita. $\square$

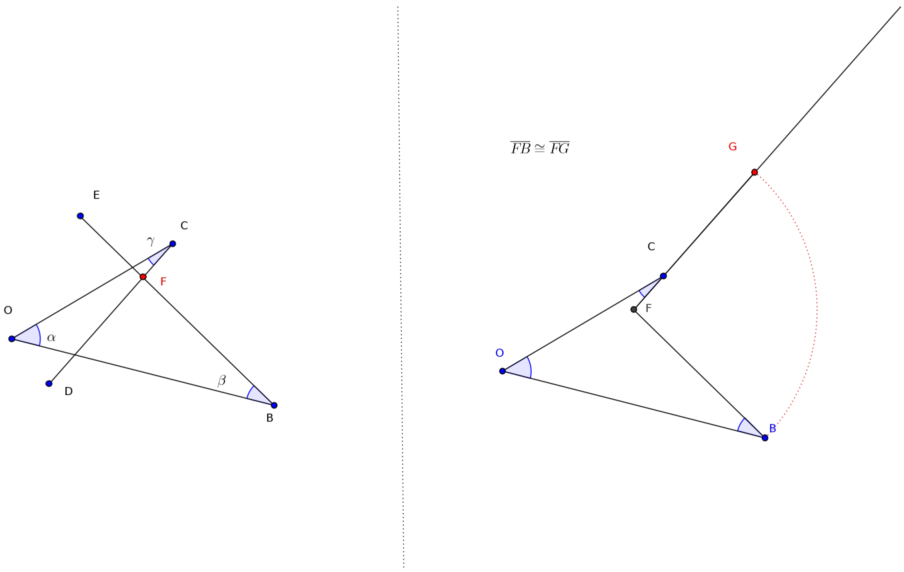
6. (Harjoitus 8.2.3., [L]) Osoita, että jos $\alpha + \beta + \gamma < 180°$, niin Poincarén geometriassa on kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ.

Ratkaisu.

Olkoon $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. Konstruoidaan edellisen tehtävän tapaan P-kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ.

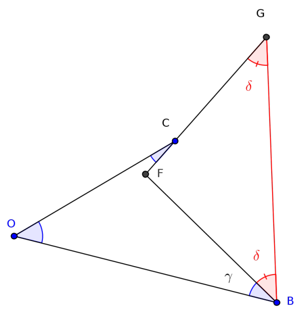
Olkoon O jokin (euklidisen geometrian tason) piste. Muodostetaan kulma $\angle COB \cong \alpha$ ja kulmat $\angle EBO \cong \beta$, $\angle DCO \cong \gamma$. Koska $\alpha+\beta+\gamma < 180°$, leikkaavat $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{BE}$ pisteessä F kolmion BOC sisällä.

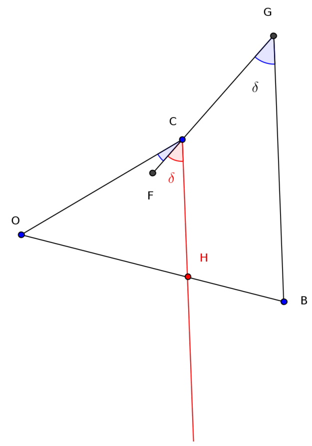
Valitaan piste G puolisuoralta $\overrightarrow{FC}$ siten, että $\overline{FB} \cong \overline{FG}$.



Kolmio BFG on siis tasakylkinen, joten $\angle BGF \cong \angle GBF = \delta$.

Muodostetaan nyt kulma $\angle DCH' \cong \delta$, merkitään sen kyljen $\overrightarrow{CH'}$ ja suoran OB leikkauspistettä H.



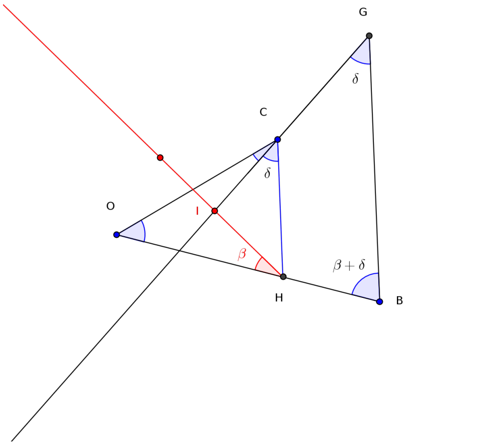


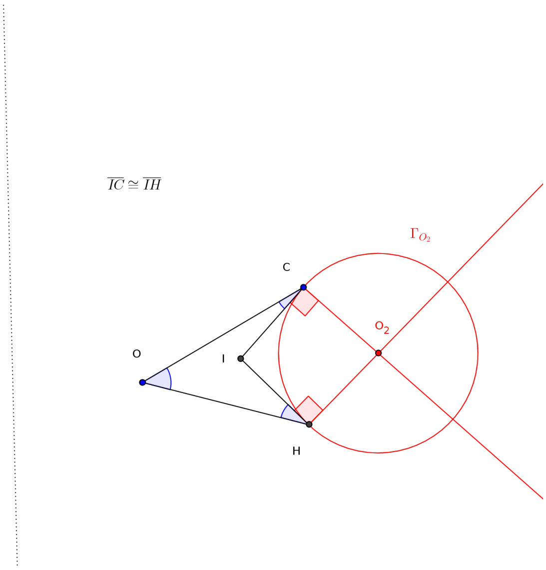
Muodostetaan kulma $\angle OHI' \cong \beta$, merkitään sen kyljen $\overrightarrow{HI'}$ ja puolisuoran $\overrightarrow{CF}$ leikkauspistettä I.

Kulmat $\angle FCH$ ja $\angle FGB$ ovat samankohtaiset kulmat suoralla FC, joten $CH \parallel GB$ ja siten $\angle OHC \cong \angle OBG$. Toisaalta $\angle OBG = \gamma + \delta$, joten $\angle IHC = \angle OHC - \angle OHI = \delta$.

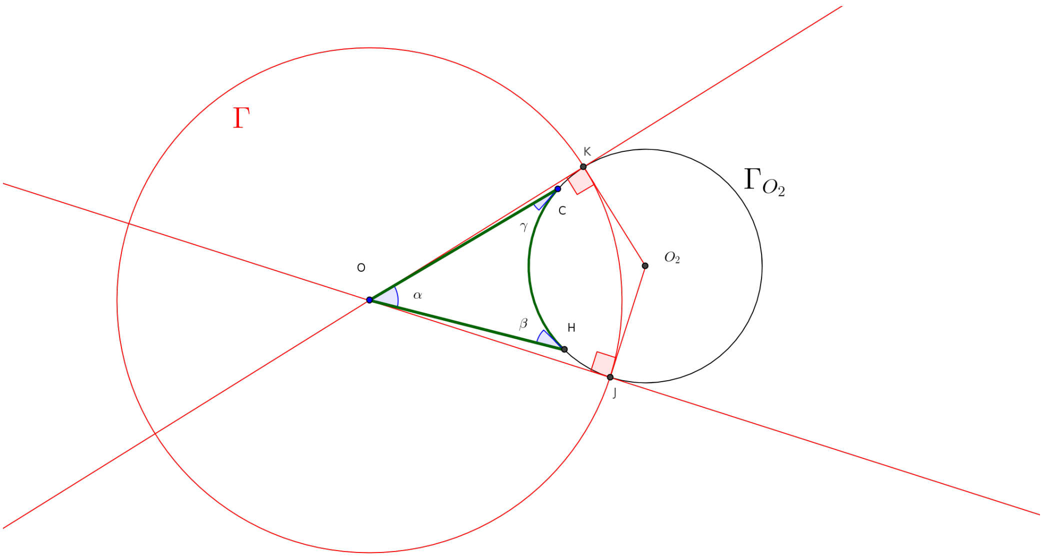
Kolmiossa HIC on siis yhtenevät kulmat $\angle CHI = \delta = \angle CHI$ ja siten yhtenevät sivut $\overline{IC} \cong \overline{IH}$.

Nyt suorien IC ja IH pisteiden C ja H kautta kulkevat normaalit leikkaavat pisteessä O_2. Kolmiot O_2IC ja O_2IH ovat yhtenevät (suorakulmainen ssk), joten O_2-keskinen, $\overline{O_2C}$-säteinen ympyrä Γ_{O_2} sivuaa suoria IC ja IH pisteissä C ja H.





Olkoon J pisteen O kautta kulkevan ympyrän Γ_{O_2} tangentin sivuamispiste kyseisen ympyrän kanssa. Nyt O-keskinen, $\overline{OJ}$-säteinen ympyrä Γ leikkaa ympyrän Γ_{O_2} kohtisuorasti.



Tarkastellaan nyt Poincarén mallia, jossa P-taso muodostuu ympyrän Γ sisäpisteistä. (Jos mallin tasoksi haluttaisiin jonkin toisen ympyrän sisäpisteet, voitaisiin Γ siirtää homotetialla kyseiselle ympyrälle.)

Nähdään, että $\overline{OC}$ ja $\overline{OH}$ ovat pisteen O kautta kulkevilla P-suorilla ja siten P-janoja. Samoin pisteiden H ja C ympyrästä Γ_{O_2} erottama kaari on sillä P-suoralla, jonka kantaja Γ_{O_2} on, joten myös se on P-jana.

P-kolmiossa OCH on siis toivotusti kulmat α, β ja γ. Konstruktion aloittanutta kulman α kylkien valintaa muuntelemalla saadaan lisää toivotunlaisia kolmioita.

$\square$