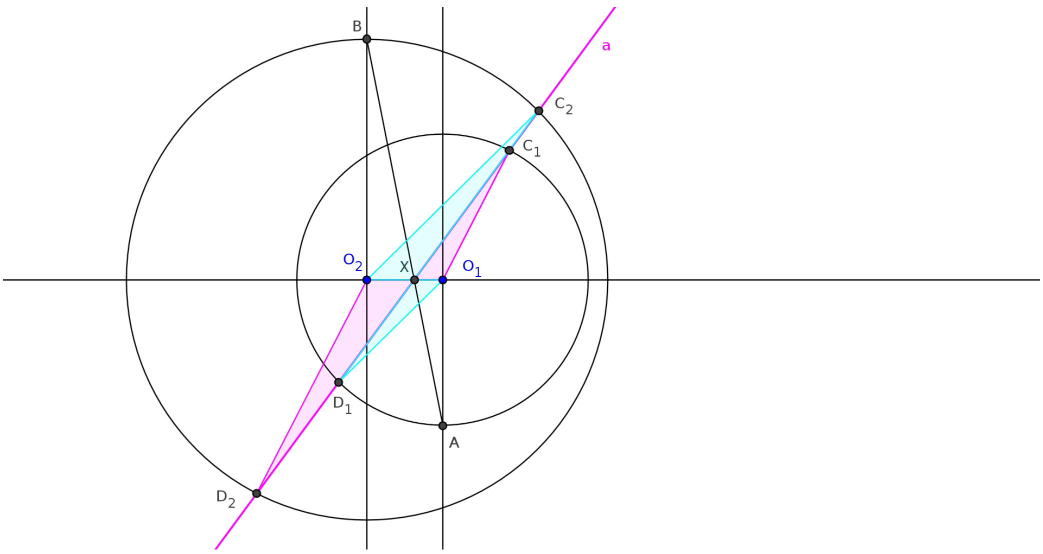
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Malliratkaisuja harjoituksiin 10

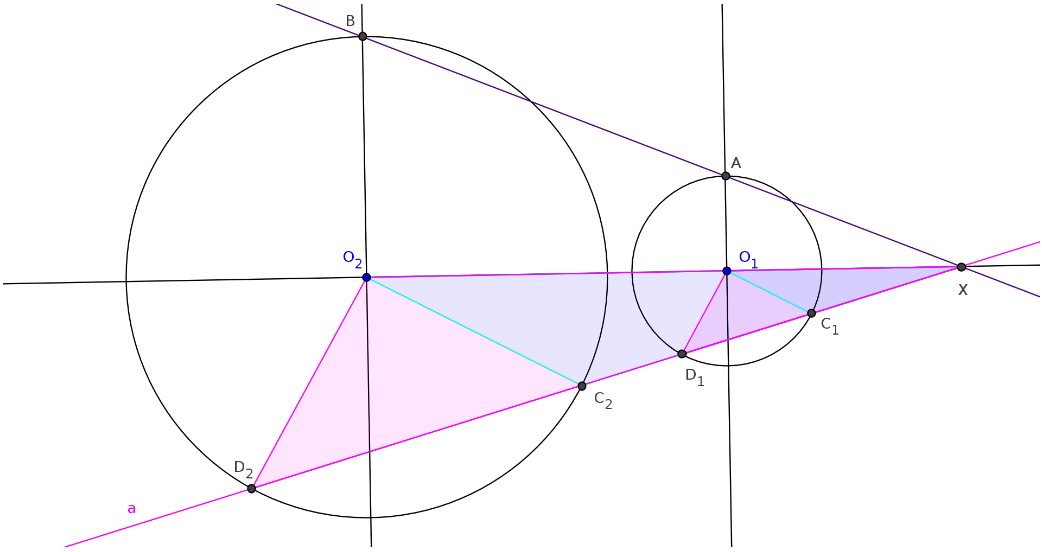
1. (Harjoitus 4.2.2., [L]) Osoita, että toisiaan sivuamattomat erisäteiset ympyrät ovat sekä keskeissymmetriset että käänteisesti keskeissymmetriset.

   Ratkaisuehdotus.

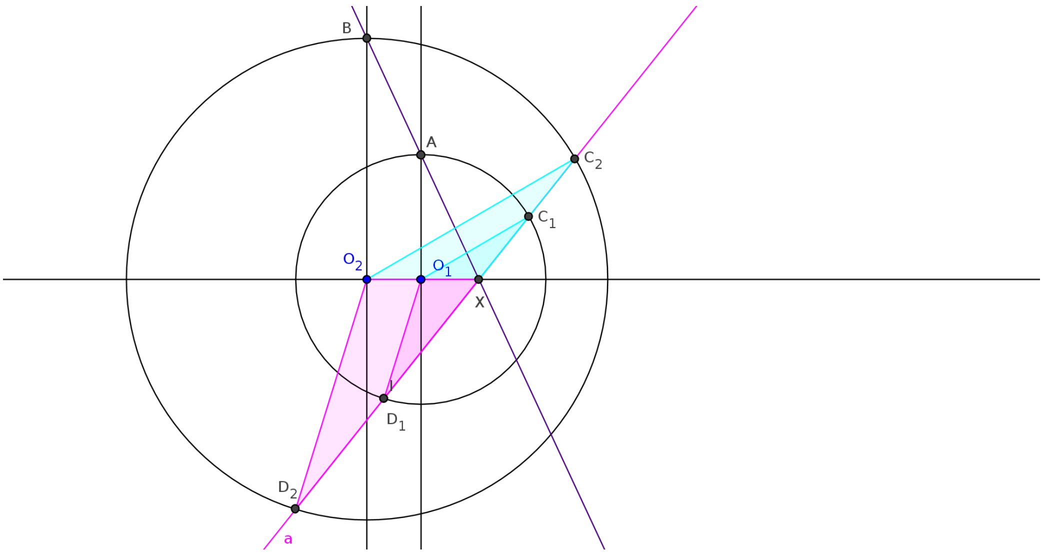
   Olkoot Γ_1 ja Γ_2 erisäteiset ympyrät. Olkoot ympyröiden keskipisteet O_1, O_2 ja säteet r_1, r_2. Olkoon A (jompikumpi) ympyrän Γ_1 leikkauspiste sen keskipisteen O_1 kautta kulkevan suoran O_1O_2 normaalin kanssa ja B ympyrän Γ_2 (jompikumpi) leikkauspiste sen keskipisteen O_2 kautta kulkevan suoran O_1O_2 normaalin kanssa. Olkoon X suorien O_1O_2 ja AB leikkauspiste.

   Oheisissa kuvissa näkyvät tilanteet, joissa ympyrät ovat sisäkkäin ja joissa ne ovat toistensa ulkopuolella. Lisäksi on eroteltu tapaukset, joissa A ja B ovat eri puolilla suoraa O_1O_2 niistä tapauksista, joissa ne ovat sen samalla puolella. Huomataan kuitenkin, että seuraava päättely pätee tapauksesta riippumatta. Kuvien tapauksista kahdessa ensimmäisessä X on käänteisen keskeissymmetrian keskus, jäljemmissä taas keskeissymmetriakeskus.

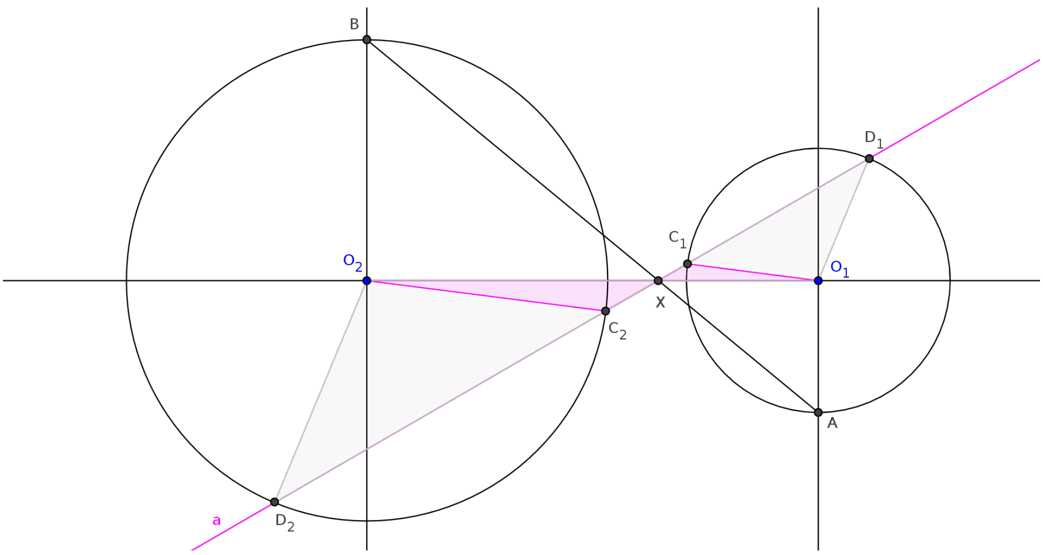




B
A
O_2
O_1
X
C_1
D_1
C_2
D_2
a



B
A
C_2
C_1
O_2
O_1
X
D_1
D_2
a



Kolmioissa AO_1X ja BO_2X on yhtenevät kulmat $\angle O_1XA \cong \angle O_2XB$ (tapauksesta riippuen sama kulma tai ristikulmat) ja yhtenevät suorat kulmat $\angle AO_1X \cong \angle BO_2X$, joten ne ovat yhdenmuotoiset (kk). Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa $\frac{\overline{XO_1}}{\overline{xO_2}} = \frac{r_1}{r_2}$.

Olkoon nyt a suora, joka kulkee pisteen X kautta ja leikkaa ympyrän Γ_1 pisteissä C_1, D_1 ja ympyrän Γ_2 pisteissä C_2, D_2. Oletetaan, että vaikkapa C_1 on pisteiden D_1 ja C_2 välissä ja C_2 pisteiden C_1 ja D_2 välissä.

Kolmioissa XO_1C_1 ja XO_2C_2 on $\angle O_1XC_1 \cong \angle O_2XC_2$ (ristikulmat) ja äskeisen mukaan $\frac{\overline{XO_1}}{\overline{XO_2}} = \frac{r_1}{r_2}$, joten (ssk)-ehdon perusteella joko kolmiot ovat yhdenmuotoisia tai sitten $\angle O_1C_1X$ ja $\angle O_2C_2X$ ovat vieruskulmia.

Samoin kolmioissa XO_1D_1 ja XO_2D_2 on $\angle O_1XD_1 \cong \angle O_2XD_2$ (ristikulmat) ja todettiin $\frac{\overline{XO_1}}{\overline{XO_2}} = \frac{r_1}{r_2}$, joten (ssk)-ehdon perusteella joko kolmiot ovat yhdenmuotoisia tai sitten $\angle O_1D_1X$ ja $\angle O_2D_2X$ ovat vieruskulmia.

Toisaalta kulmat $\angle O_1C_1X$ ja $\angle O_1C_1D_1$ ovat vieruskulmia, samoin $\angle O_2C_2X$ ja $\angle O_2C_2D_2$.

Nyt siis joko kolmiot XO_1C_1 ja XO_2C_2 ovat yhdenmuotoisia sekä kolmiot XO_1D_1 ja XO_2D_2 ovat yhdenmuotoisia, tai sitten kolmiot XO_1C_1 ja XO_2D_2 ovat yhdenmuotoisia sekä kolmiot XO_1D_1 ja XO_2C_2 ovat yhdenmuotoisia. Joko siis $C_1 = f_{X,(-)\frac{r_1}{r_2}}(C_2)$ tai $C_1 = f_{X,(-)\frac{r_1}{r_2}}(D_2)$ (missä merkintä (-) tarkoittaa, että homotetiasuhteeseen liitetään aiheellisuuden mukaan miinusmerkki, tapauksen perusteella).

$\square$

Huomaa, että ympyröiden osoittamiseksi käänteisesti keskeissymmetrisiksi ei oletusta erisäteisyydestä tarvita: jos ympyröiden keskipisteiden välisen janan keskipiste on X, kuvaa $f_{X,-1}$ (eli peilaus pisteen X suhteen) ympyrät toisilleen.

2. (Harjoitus 4.2.3., [L]) Piste A on kiinteä ympyrän Γ sisäpiste. Määritä kaikkien janojen $\overline{AP}$, missä $P \in \Gamma$, keskipisteiden joukko.

   Ratkaisu.

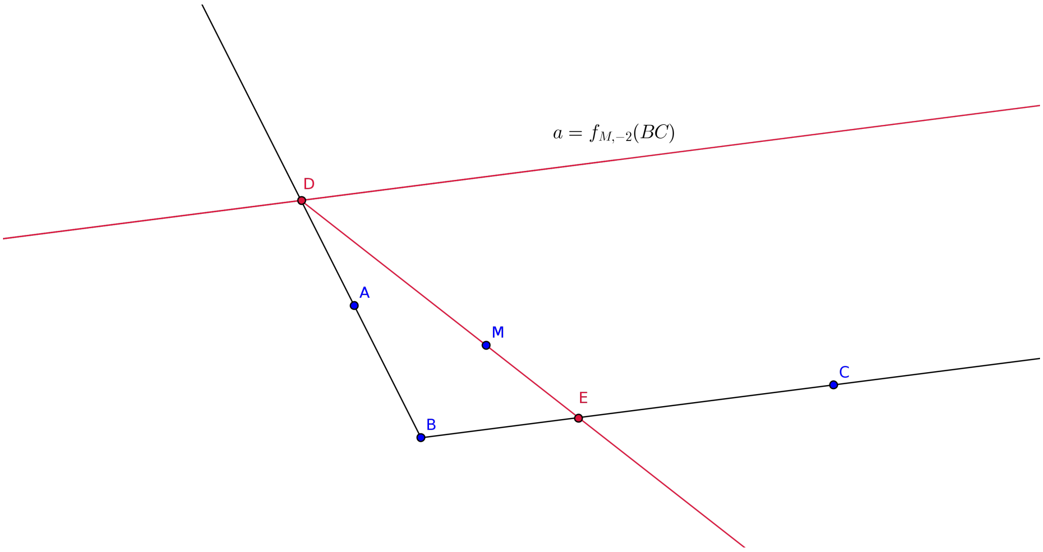
   Muistetaan, että homotetia (venytys) $f_{O,k}$ on kuvaus, joka kuvaa pisteen Q sille puolisuoran $\overrightarrow{OQ}$ pisteelle Q', jolle pätee $\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}} = k$.

   Olkoon A jokin ympyrän Γ sisäpiste ja $P \in \Gamma$. Janan $\overline{AP}$ keskipisteelle M pätee määritelmän mukaan $M \in \overrightarrow{AP}$ ja $\overline{AP} = \overline{AM} + \overline{AM}$ eli $\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AM}}{2\overline{AM}} = \frac{1}{2}$, joten M on pisteen P kuva homotetiassa $f_{A,\frac{1}{2}}$. Kun vielä selvästi $f_{A,\frac{1}{2}}$ on bijektio joukolta Γ tutkitulle janojen keskipisteiden joukolle, nähdään että tutkittu joukko on *ympyrän* Γ *kuva kuvauksessa* $f_{A,\frac{1}{2}}$.

3. (Harjoitus 4.2.5., [L]) Piste M on kulman $\angle ABC$ aukeamassa. Konstruoi jana, jonka päätepisteet ovat kulman kyljillä ja jonka M jakaa suhteessa $1:2$. (*Vihje: käytä homotetiakuvausta* $f_{M,-2}$)

   Ratkaisuehdotus.

   Tutkitaan vihjeen mukaisesti suoran BC kuvaa kuvauksessa $f_{M,-2}$. Lauseen 4.2.2. mukaan tämä kuva on suoran BC kanssa yhdensuuntainen suora a. Koska BC leikkaa suoran AB, leikkaa myös a sen jossakin pisteessä D. Koska M on kulman $\angle ABC$ aukeamassa, leikkaa $\overrightarrow{DM}$ suoran BC jossakin pisteessä E. Nyt D on puolisuoran $\overrightarrow{ME}$ vastakkaisella puolisuoralla (ja $D \in a$, $E \in BC$), joten $D = f_{M,-2}(E)$ ja siten $\overline{EM} = 2\overline{MD}$. Jana $\overline{ED}$ on siis halutunlainen jana.



Huomaa, että toinen mahdollinen ratkaisu olisi saatu tutkimalla suoran BC kuvan asemesta suoran AB kuvaa, tai käyttämällä kuvausta $f_{M,-\frac{1}{2}}$.

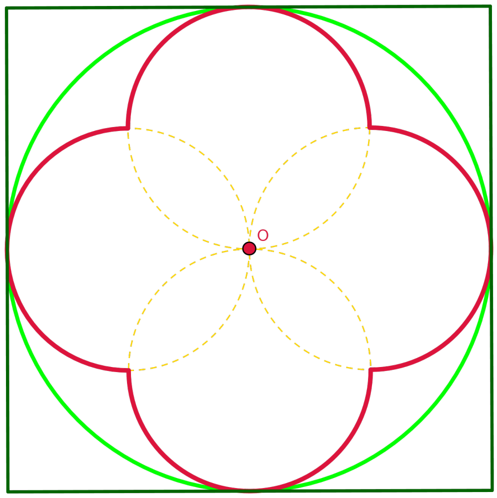
4. (Harjoitus 4.3.3., [L]) Piirrä ympyrän Γ sisään- ja ympäri piirrettyjen neliöiden kuvat inversiossa f_Γ.

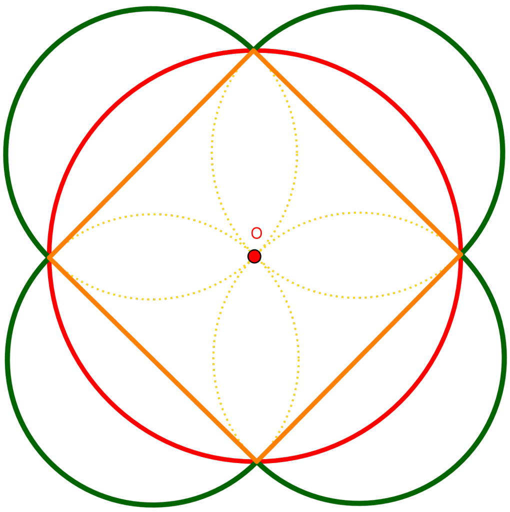
   Ratkaisu. Olkoon O ympyrän Γ keskipiste.

   Lauseen 4.3.1. mukaan inversiossa suoran (joka ei kulje pisteen O kautta) kuva on ympyrä, joka kulkee pisteen O kautta ja jolle pisteen O sisältävä halkaisija on kohtisuorassa kuvattua suoraa vastaan.

   Neliön muodostavat janat ovat niitä vastaavien suorien osajoukkoja, joten ne kuvautuvat inversiossa osiksi kyseisten suorien kuvia. Ympyrän Γ ympäri (ja sisään) piirretyn neliön kuva inversiossa on siis yhdiste neljästä ympyränkaaren osasta. Inversio säilyttää suorien ja ympyröiden leikkauskulmat (lause 4.3.3), joten neljä ympyränkaarta kohtaavat siis toisensa suorissa kulmissa, ja siten kukin neljästä kaaresta on puoliympyrä.

   Kun vielä todetaan, että ympyrän sisään piirretty neliö kuvautuu ympyrän ulkopuolelle ympyrän kehällä olevia kiintopisteitä lukuunottamatta, ja vastaavasti ympyrän ympäri piirretty neliö kuvautuu sen sisäpuolelle (taas kiintopisteitä lukuunottamatta), voidaan neliöiden kuvat nyt piirtää.





5. (Harjoitus 4.3.4., [L]) Osoita, että kaksoissuhde säilyy inversiossa eli, että inversiolle pätee

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=\frac{\overline{A'C'}\cdot\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}\cdot\overline{B'C'}},$$

missä A' on A:n kuva jne. inversiossa.

Ratkaisu.

Olkoot A, B, C, D pisteitä, joista minkä tahansa kahden kautta kulkeva suora ei kulje pisteen O kautta. Olkoot A', B', C', D' niiden kuvat inversiossa f_Γ.

Suorien leikkauskulmat säilyvät inversiossa (lause 4.3.3.) joten mm. $\angle AOC \cong \angle A'OC'$. Inversion määritelmän mukaan

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \overline{OD} \cdot \overline{OD'}$$

ja siten mm. $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}$. Kolmiot AOC ja $C'OA'$ ovat siis yhdenmuotoiset (sks) ja siten $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{C'O}}$, mistä $\overline{AC} = \overline{A'C'}\frac{\overline{AO}}{\overline{C'O}}$.
Samoin todetaan kolmiot BOD ja $D'OB'$, AOD ja $D'OA'$ sekä BOC ja $C'OB'$ yhdenmuotoisiksi, ja yhdenmuotoisuuksista seuraa $\overline{BD} = \overline{B'D'}\frac{\overline{BO}}{\overline{D'O}}$, $\overline{AD} = \overline{A'D'}\frac{\overline{AO}}{\overline{D'O}}$ ja $\overline{BC} = \overline{B'C'}\frac{\overline{BO}}{\overline{C'O}}$.
Saadaan

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}\frac{\overline{AO}}{\overline{C'O}} \cdot \overline{B'D'}\frac{\overline{BO}}{\overline{D'O}}}{\overline{A'D'}\frac{\overline{AO}}{\overline{D'O}} \cdot \overline{B'C'}\frac{\overline{BO}}{\overline{C'O}}} = \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{B'C'}}.$$

Tulos siis pätee, jos O ei ole minkään pisteparin kautta kulkevalla suoralla.

Olkoon nyt A, C, O samalla suoralla, A kahden muun pisteen välissä.

Oletuksista siis nyt

$$\overline{AC} = \overline{CO} - \overline{AO}.$$

Toisaalta inversion määritelmän nojalla $\overline{CO} \cdot \overline{C'O} = \overline{AO} \cdot \overline{A'O}$ ja siitä $\overline{CO} = \overline{AO}\frac{\overline{A'O}}{\overline{C'O}}$, joten

$$\overline{AC} = \overline{AO}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OC'}} - \overline{AO} = \frac{(\overline{OA'} - \overline{OC'})\overline{AO}}{\overline{OC'}}.$$

Oletuksista saadaan vielä $\overline{A'C'} = \overline{OA'} - \overline{OC'}$, joten

$$\overline{AC} = \frac{(\overline{A'C'})\overline{AO}}{\overline{OC'}},$$

mikä on sama tulos kuin yllä yhdenmuotoisista kolmioista johdettu. Loppuosa yllä esitetystä todistuksesta kelpaa siis sellaisenaan.

□

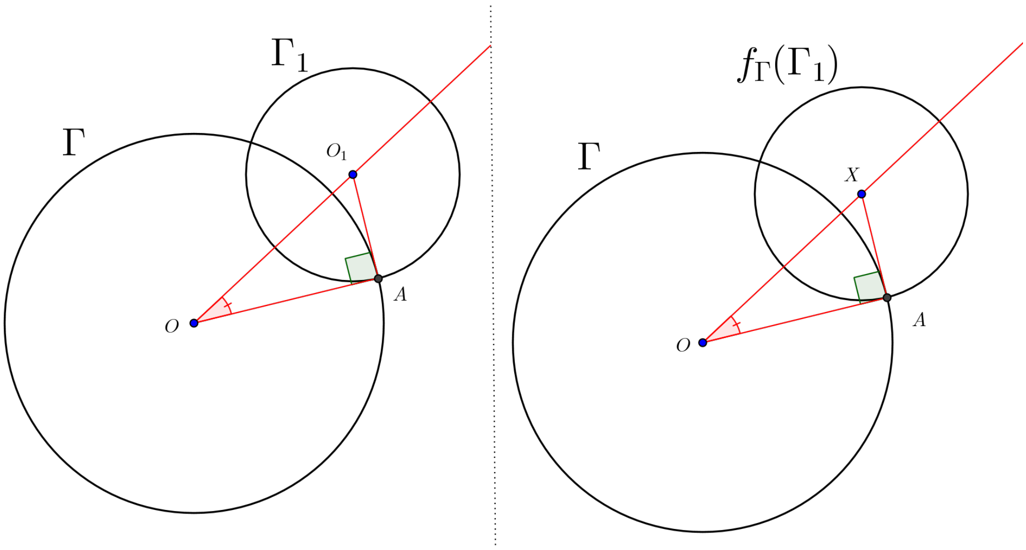
6. (Harjoitus 4.3.5., [L]) Ympyrä Γ_1 leikkaa ympyrän Γ kohtisuorasti. Osoita, että f_Γ kuvaa Γ_1:n itselleen.

Ratkaisu.

Oletetaan, että $O \notin \Gamma_1$. Merkitään ympyrän Γ keskipistettä O, ympyrän Γ_1 keskipistettä $O_{\Gamma 1}$ ja ympyröiden Γ ja Γ_1 leikkauspisteitä A ja B. Ympyrän Γ pisteenä A on inversion kiintopiste.

Lauseen 4.3.1. mukaan $f_\Gamma(\Gamma_1)$ on ympyrä, jonka keskipiste X on puolisuoralla $\overrightarrow{OO_{\Gamma 1}}$.

Lauseen 4.3.3. mukaan inversio säilyttää ympyröiden leikkauskulmat, joten Γ ja $f_\Gamma(\Gamma_1)$ leikkaavat kohtisuorasti.



Kolmioissa OAO_1 ja OAX on siis yhteinen puolisuorien $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OX}$ ja $\overrightarrow{OA}$ muodostama kulma, yhteinen sivu $\overline{OA}$ ja yhtenevät suorat kulmat $\angle OAO_1 \cong \angle OAX$, joten kolmiot ovat yhtenevät (ksk). Kolmioiden yhtenevyydestä $\overline{O_1A} \cong \overline{XA}$, eli ympyröiden Γ_1 sekä $f_\Gamma(\Gamma_1)$ säteet ovat yhtenevät, ja $\overline{OO_1} \cong \overline{OX}$, eli ympyröiden keskipisteet ovat samat.

Siis $f_\Gamma(\Gamma_1) = \Gamma_1$.

$\square$