MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 5
16.2. alkavalle viikolle

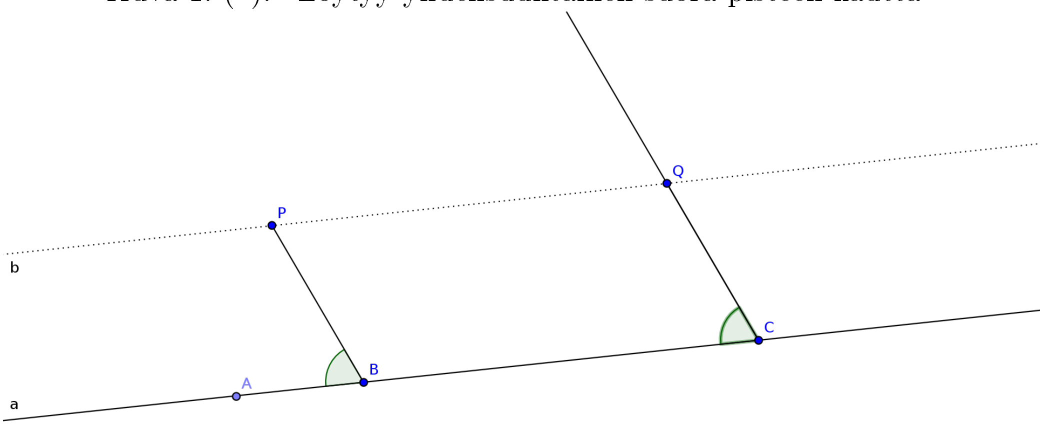
1. (Harjoitus 1.5.8., [L]) Osoita, että jos kolmion $ABC$ sivun $AB$ suuntainen suora kulkee sivun $AC$ keskipisteen $B'$ kautta, niin se kulkee myös sivun $BC$ keskipisteen $A'$ kautta. Osoita, että $A'B'$ on yhtä pitkä kuin sivun $AB$ puolikas.

   *Pohjustusta.*

   Näytetään tässä ja seuraavassa harjotuksessa käytettävä yksinkertainen tulos:

(*) Jos $a$ on suora ja $P \notin a$, niin on olemassa suora $b$ siten, että $P \in b$ ja $a \parallel b$.

Kuva 1: (*): "Löytyy yhdensuuntainen suora pisteen kautta"




Todistus. Valitaan suoralta $a$ erilliset pisteet $B$ ja $C$ (A2) ja piste $A$ siten, että $B$ on pisteiden $A$ ja $C$ välissä (A4). Nyt löytyy piste $Q$ samalta puolelta suoraa $a$Â kuin $P$ siten, että $\angle ABP \cong \angle ACQ$ (A10) ja $\overline{BP} \cong \overline{CQ}$ (A7). Kutsutaan suoraa $PQ$ (A1) nimellä $b$.

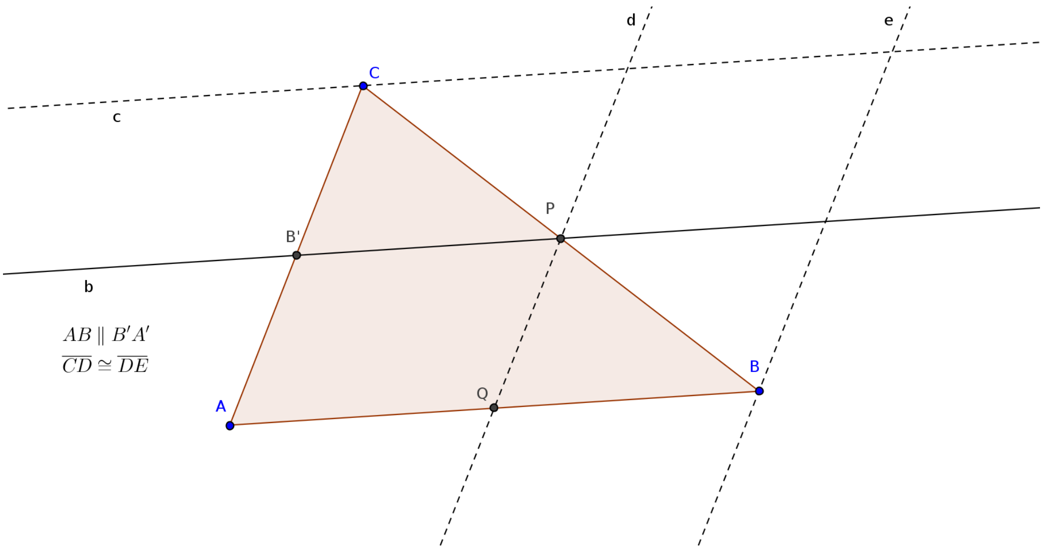
Nelikulmiossa $BCQP$ on siis $PB \parallel CQ$ (lause 1.5.1)Â ja $\overline{PB} \cong \overline{CQ}$, eli se on suunnikas (harjoitus 1.5.6. eli viime viikon harjoitus 3). Suunnikkaalle pätee $QP \parallel BC$, joten suora $b \parallel a$. $\square$

*Ratkaisuehdotus.*

Olkoot $ABC$ kolmio, $B'$ janan $\overline{AC}$ keskipiste ja $b$ suoran $AB$ kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen $B'$ kautta. Nimetään suoran $b$ ja suoran $BC$ leikkauspistettä $P$.

Tuloksen $(*)$ mukaan on suoran $AB$ kanssa yhdensuuntainen suora $c$, joka kulkee pisteen $C$ kautta. Suorat $AB$, $b$ ja $c$ ovat yhdensuuntaisia ja $\overline{AB'} \cong \overline{B'C}$, joten lauseen 1.5.6. nojalla $\overline{BP} \cong \overline{PC}$. Piste $P$ on siis janan $\overline{BC}$ keskipiste, $P = A'$.

Edelleen tuloksen $(*)$ nojalla löytyy suoran $AC$ kanssa yhdensuuntaiset suorat $d$, joka kulkee pisteen $P$ kautta, ja $e$, joka kulkee pisteen $B$ kautta. Nimitetään suoran $d$ ja suoran $AB$ leikkauspistettä $Q$. Nyt suorat $AC$, $d$ ja $e$ ovat yhdensuuntaisia ja äsken nähtiin, että $\overline{BP} \cong \overline{PC}$, joten taas lauseen 1.5.6. nojalla $Q$ on janan $\overline{AB}$ keskipiste.

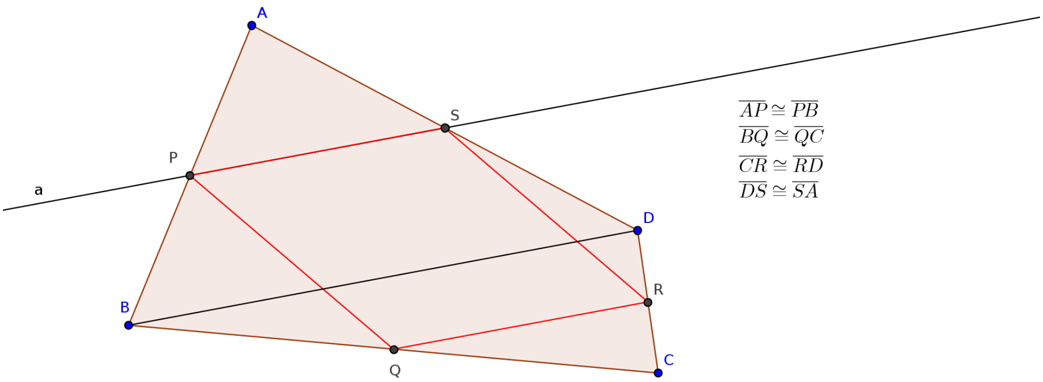



Toisaalta nelikulmiossa $AQPB'$ on $AQ \parallel B'P$ ja $AB' \parallel QP$, eli se on suunnikas, ja harjoituksen 1.5.6. (viime viikon harjoitus 3) nojalla $\overline{B'P} \cong \overline{AQ}$. Jana $\overline{B'P} = \overline{A'B'}$ on yhtenevä janan $\overline{AB}$ puolikkaan kanssa. $\square$

2. (Harjoitus 1.5.9., [L]) Olkoon $ABCD$ nelikulmio, $P, Q, R, S$ sen sivujen keskipisteet. Osoita, että $PQRS$ on suunnikas. (*Varignonin lause*)

   *Vihje: käytä edellisen tehtävän tulosta.*

   *Ratkaisuehdotus.* Olkoot $ABCD$ nelikulmio ja $P, Q, R, S$ sen sivujen keskipisteet. Tuloksen $(*)$ (edellisen tehtävän yhteydessä) nojalla löytyy suora $a$, joka kulkee pisteen $P$ kautta ja $a \parallel BD$. Äskeisen harjoituksen 1 nojalla $S \in a$ ja siten $a = PS$ (aksiooma 1). On siis $PS \parallel BD$.




Aivan samoin seuraa tuloksesta $(*)$, harjoituksesta 1 ja aksioomasta 1 myös $QR \parallel BD$. On siis $QR \parallel BD \parallel PS$ ja suorien yhdensuuntaisuuden transitiivisuuden (harjoitus 1.5.1.) nojalla on siis $PS \parallel QR$.

Edelleen samalla tavalla nähdään $PQ \parallel AC \parallel SR$, mistä $PQ \parallel SR$.

Siis $PQRS$ on suunnikas.

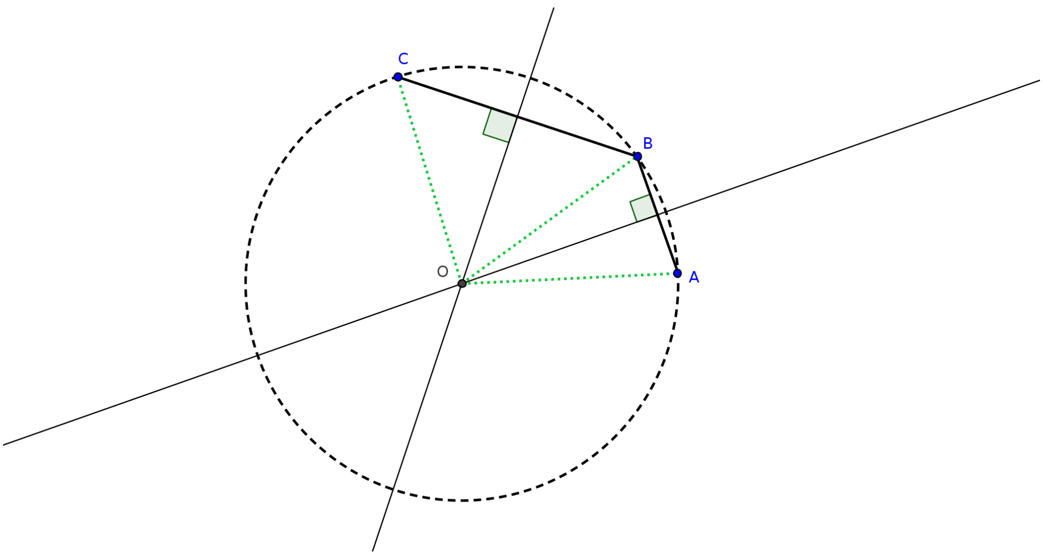
$\square$

3. (Harjoitus 1.6.1., [L]) Osoita: jos $A, B$ ja $C$ eivät ole samalla suoralla, niin on olemassa yksi ja vain yksi ympyrä $\Gamma$, johon kaikki kolme pistettä kuuluvat. *Ratkaisu.*

   Tutkitaan janojen $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ keskinormaaleita. Osoitetaan ensin, että ne leikkaavat.

   Jos suoran $a$ normaali on yhdensuuntainen suoran $b$ normaalin kanssa, seuraa lauseesta 1.5.2. että suoran $a$ normaali leikkaa suoran $b$ ja lauseesta 1.5.3. että suoran $a$ normaali on myös suoran $b$ normaali. Silloin suoran $a$ normaalin samankohtaiset kulmat suorilla $a$ ja $b$ ovat yhtenevät (kaikki suoria kulmia) ja lauseen 1.5.1 nojalla $a \parallel b$.

   Nyt siis koska $AB$ ja $BC$ eivät ole yhdensuuntaiset, eivät myöskään janojen $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ keskinormaalit ole yhdensuuntaisia, ja siten ne leikkaavat jossain pisteessä $O$.




Piste $O$ kuuluu janan $\overline{AB}$ keskinormaalille, joten $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ (lause 1.4.13). Samoin piste $O$ kuuluu janan $\overline{BC}$ keskinormaalille, joten $\overline{OB} \cong \overline{OC}$. Siis $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$ ja janojen yhtenevyyden transitiivisuuden (aksiooma 8) nojalla pisteet $A, B, C$ kuuluvat $O$-keskiselle ja $\overline{OA}$-säteiselle ympyrälle $\Gamma$.

Jos toisaalta $A, B, C$ kuuluvat jollekin $O'$-keskiselle, $\overline{O'A}$-säteiselle ympyrälle $\Gamma'$, on silloin $\overline{O'B} \cong \overline{O'A}$ ja lauseen 1.4.13. nojalla silloin $O'$ kuuluu janan $\overline{AB}$ keskinormaalille. Samoin $\overline{O'C} \cong \overline{O'B}$ ja lauseen 1.4.13. nojalla silloin $O'$ kuuluu janan $\overline{BC}$ keskinormaalille. Janojen $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ keskinormaalien leikkauspiste on yksikäsitteinen (aksioomasta 1), joten $O = O'$. Silloin myös $\overline{O'A} = \overline{OA}$, joten $\Gamma' = \Gamma$.

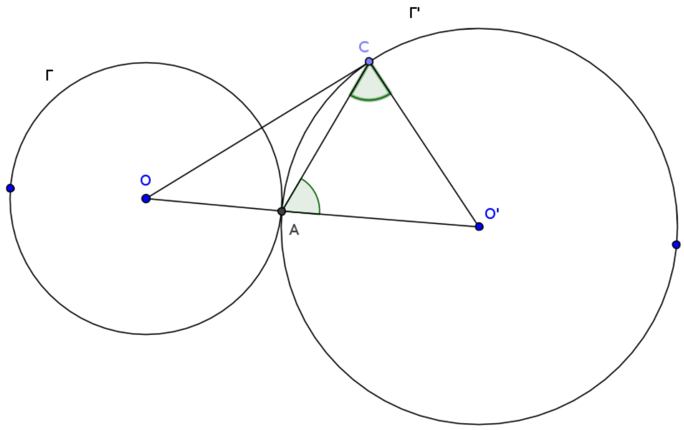
$\square$

4. (Harjoitus 1.6.2., [L]) Osoita, että jos ympyrät $\Gamma$ ja $\Gamma'$ sivuavat toisiaan pisteessä $A$, niin joko jokainen $\Gamma'$:n piste (paitsi $A$) on $\Gamma$:n ulkopuolella tai jokainen $\Gamma'$:n piste (paitsi $A$) on $\Gamma$:n sisäpuolella.

   *Ratkaisuehdotus.*

   Nimetään ympyrän $\Gamma$ keskipiste $O$ ja ympyrän $\Gamma'$ keskipiste $O'$. Lauseen 1.6.4. nojalla pisteet $O, O'$ ja $A$ ovat samalla suoralla. Lauseen 1.2.2. nojalla on yksi pisteistä $O, O', A$ kahden muun välissä. Jaetaan ratkaisu näihin kolmeen tapaukseen.

i) Oletetaan, että $A$ on pisteiden $O$ ja $O'$ välissä.



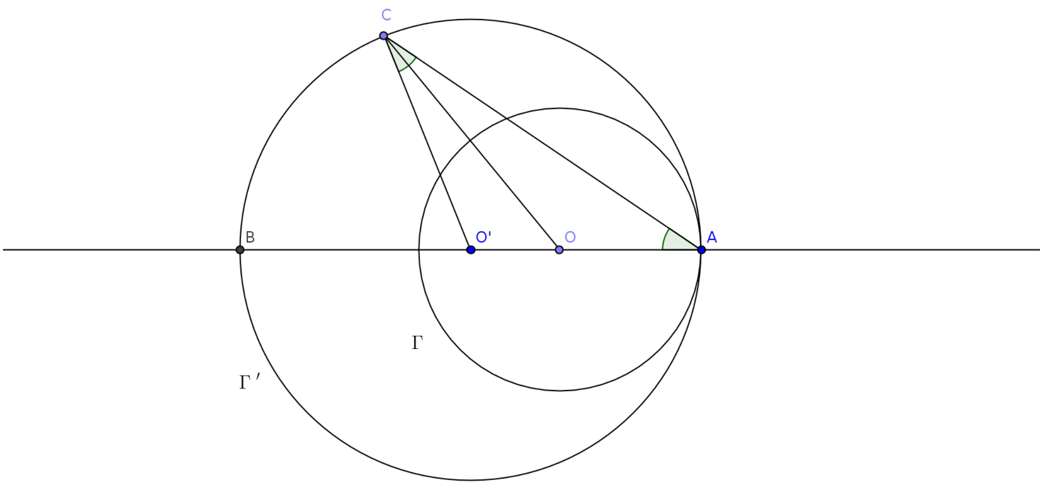

Olkoon nyt piste $C$ jokin ympyrän $\Gamma'$ piste, $C \notin OO'$. Ympyrän pisteille $\overline{O'A} \cong \overline{O'C}$ ja siten $\angle CAO' \cong \angle ACO'$ ("aasinsiltalause"1.4.10). Lauseen 1.4.8. nojalla (kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi) $\angle OAC > \angle ACO'$ ja $\angle CAO' > \angle ACO$. Siis $\angle OAC > \angle ACO' \cong \angle CAO' > \angle ACO$, mistä $\angle OAC > \angle ACO$ (harjoitukset 1.4.3. ja 1.4.4). Nyt lauseen 1.4.14. nojalla kolmiossa $ACO$ pienempää kulmaa $\angle ACO$ vastaava sivu on lyhempi kuin suurempaa kulmaa $\angle OAC$ vastaava sivu, $\overline{OA} < \overline{OC}$, eli $C$ on ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

Lauseen 1.6.3. nojalla suoralla $OO'$ ja ympyrällä $\Gamma'$ on tasan kaksi yhteistä pistettä, $A$ ja $B$. Tarkistetaan siis vielä piste $B$. Suora $OO'\hat{A}$ on ympyrän $\Gamma'$ halkaisija ja pisteet $A$ ja $B$ ovat eri puolilla pistettä $O'$. Piste $A$ on pisteiden $B$ ja $O$ välissä (lause 1.2.3.), joten määritelmän mukaan $\overline{OA} < \overline{OB}$ ja piste $B$ on ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

Siis kaikki ympyrän $\Gamma'$ pisteet pistettä $A$ lukuun ottamatta ovat ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

ii) Oletetaan, että $O$ on pisteiden $A$ ja $O'$ välissä.

Olkoon piste $C$ jokin ympyrän $\Gamma'$ piste, $C \notin OO'$. Koska $\overline{O'A} \cong \overline{O'C}$, on $\angle O'AC \cong \angle O'CA$ (lause 1.4.10). Piste $O$ on pisteiden $A$ ja $O'$ välissä, joten se on kulman $\angle O'CA$ aukeamassa ja kulmien $<$ -relaation määritelmän mukaan $\angle OCA < \angle O'CA$. Siis $\angle OCA < \angle O'CA \cong \angle O'AC = \angle OAC$, joten harjoituksen 1.4.3. nojalla $\angle OCA < \angle OAC$. Nyt lauseen 1.4.14. nojalla kolmiossa $OAC$ on $\overline{OA} < \overline{OC}$, eli $C$ on ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

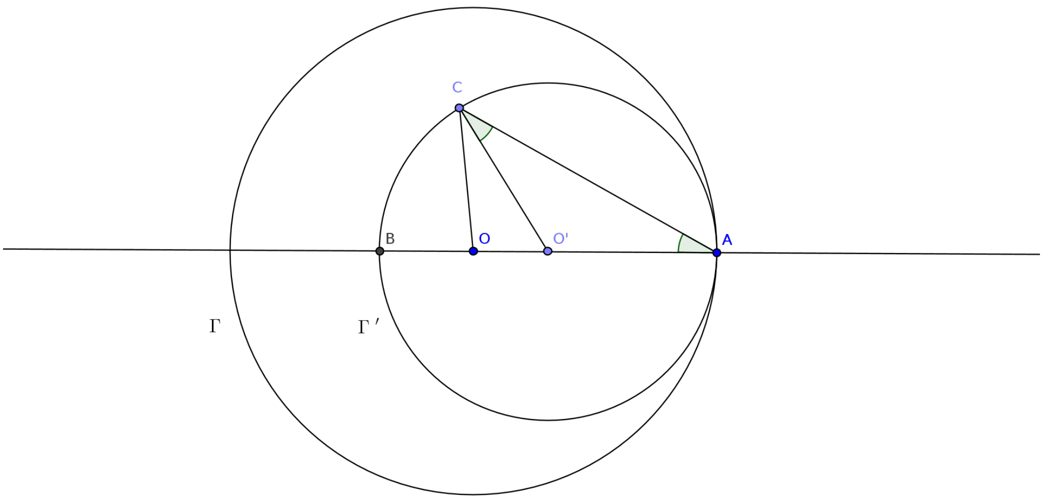



Tarkistetaan vielä halkaisijan $OO'$ toinen yhteinen piste ympyrän $\Gamma'$ kanssa, piste $B$, eri puolella keskipistettä $O'$ kuin $A$.

On $\overline{OA} < \overline{O'A} \cong \overline{O'B} < \overline{OB}$, mistä $\overline{OA} < \overline{OB}$, eli $B$ on ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

Siten pistettä $A$ lukuun ottamatta kaikki ympyrän $\Gamma'$ pisteet ovat ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

iii) Oletetaan, että $O'$ on pisteiden $A$ ja $O$ välissä.




Olkoon piste $C$ jokin ympyrän $\Gamma'$ piste, $C \notin OO'$. Koska $\overline{O'A} \cong \overline{O'C}$, on $\angle O'AC \cong \angle O'CA$ (lause 1.4.10). Piste $O'$ on pisteiden $O$ ja $A$ välissä, joten se on kulman $\angle OCA$ aukeamassa ja siten $\angle O'CA < \angle OCA$. Nyt $\angle OAC = \angle O'AC \cong \angle O'CA < \angle OCA$ ja harjoituksen 1.4.3. nojalla $\angle OAC < \angle OCA$. Kolmiossa $OAC$ on siten lauseen 1.4.14. nojalla $\overline{OC} < \overline{OA}$. Piste $C$ on siis ympyrän $\Gamma$ ulkopuolella.

Tarkistetaan vielä halkaisijan $OO'$ toinen yhteinen piste ympyrän $\Gamma'$ kanssa, piste $B$, eri puolella keskipistettä $O'$ kuin $A$.

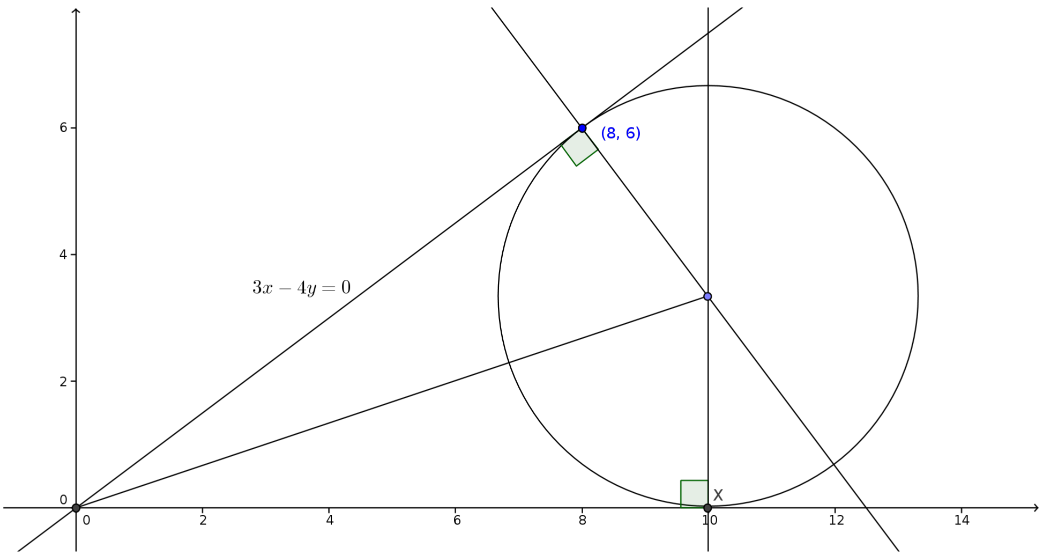
Jos $O \neq B$, on joko $B$ pisteiden $O$ ja $O'$ välissä, jolloin $B$ on pisteiden $O$ ja $A$ välissä ja siten $\overline{OB} < \overline{OA}$, tai sitten $O$ on pisteiden $B$ ja $O'$ välissä, jolloin $\overline{OB} < \overline{O'B} \cong \overline{O'A} < \overline{OA}$. Piste $B$ on siis joka tapauksessa ympyrän $\Gamma$ sisäpuolella.

Pistettä $A$ lukuun ottamatta ympyrän $\Gamma'$ kaikki pisteet ovat siis ympyrän $\Gamma$ sisäpuolella.

Kaikissa kolmessa tapauksessa ( $i), ii), iii)$ ) ympyrän $\Gamma'$ pisteet sivuamispistettä lukuunottamatta ovat joko ympyrän $\Gamma$ sisä- tai ulkopuolella. $\square$

5. (YO-tehtävä, K2014) Ympyrä sivuaa suoraa $3x-4y=0$ pisteessä $(8,6)$. Lisäksi se sivuaa positiivista $x$-akselia. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

*Ratkaisu.*




Ympyrän keskipiste sijaitsee sivuamispisteistä piirretyillä suoran $3x - 4y = 0$ ja $x$-akselin normaaleilla.

Kolmiot, joiden kärkipisteet ovat origo, ympyrän keskipiste ja ympyrän sivuamispisteet suoralla $3x - 4y = 0$ ja $x$-akselilla, ovat yhtenevät. Yhtenevistä kolmioista saadaan ympyrän keskipisteen $x$-koordinaatiksi $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Pisteen $(8, 6)$ kautta kulkevan suoran $3x - 4y = 0$ normaalin yhtälö on $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 8)$, mistä uudelleen järjestelemällä tulee $y = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$. Tämä leikkaa suoran $x = 10$ pisteessä $x = 10$, $y = \frac{50}{3} - \frac{40}{3} = \frac{10}{3}$.

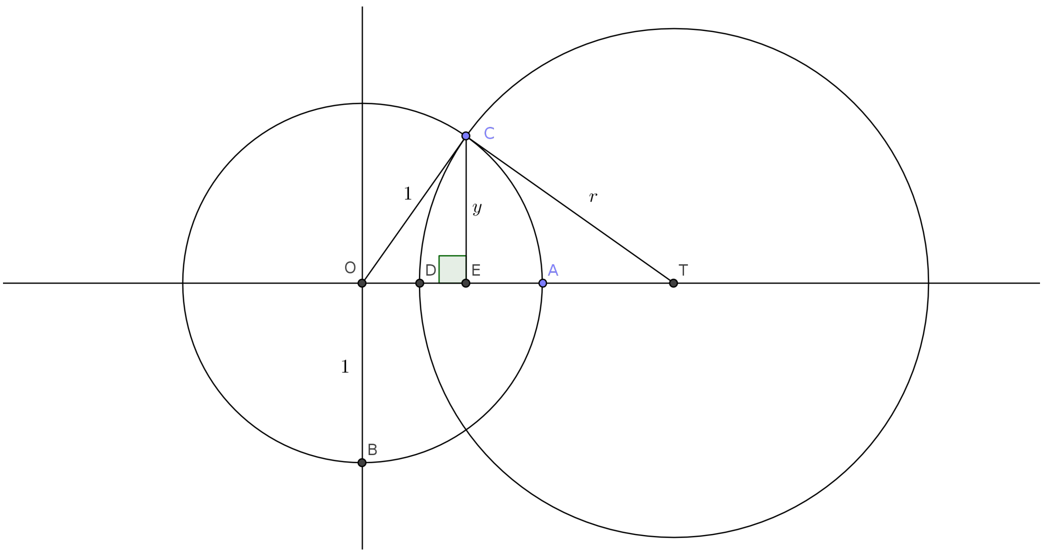
Ympyrän keskipiste on siis $(10, \frac{10}{3})$. Sen säde on sen keskipisteen etäisyys sivuamistaan suorista, kuten $x$-akselista, josta etäisyys on $y$, eli $r = \frac{10}{3}$.

6. (YO-tehtävä, S2014) Olkoon $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ ja $t > 1$. Piste $T = (t, 0)$ keskipisteenä piirretään ympyrä, joka leikkaa yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kohtisuorasti kuvion mukaisessa pisteessä $C$ sekä janan $OA$ pisteessä $D$.

   a) Määritä pisteen $C$ koordinaatit parametrin $t$ avulla lausuttuna.

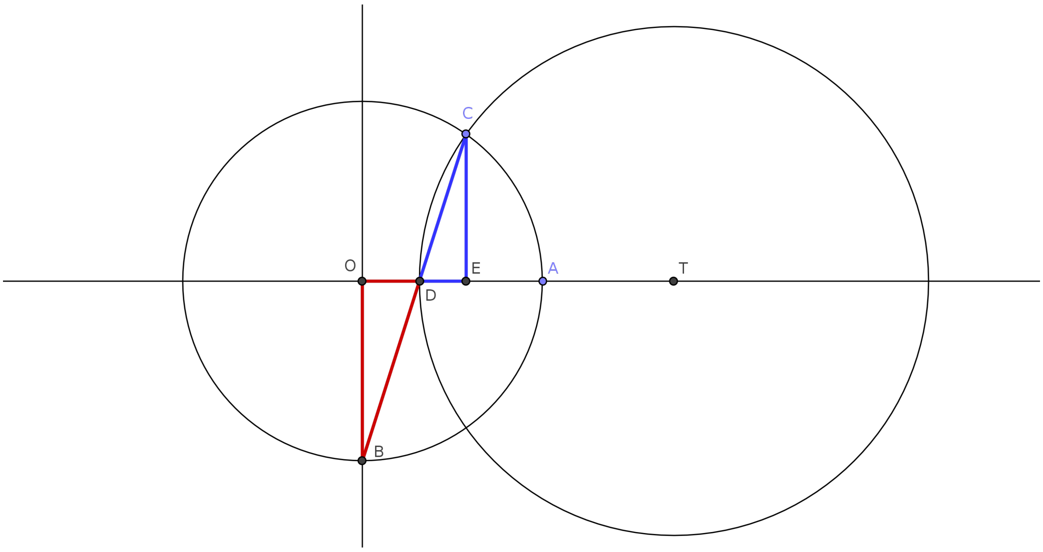
   b) Osoita, että pisteet $B, D$ ja $C$ ovat samalla suoralla.

*Ratkaisu.*




a) Kolmiot $OTC$ ja $OCE$ ovat yhdenmuotoiset, joten $\frac{OE}{1} = \frac{1}{t}$. Pisteen $C$ $x$-koordinaatti on siis $\frac{1}{t}$. Piste $C$ on yksikköympyrällä, jonka pisteille $1 = x^2 + y^2$, joten pisteen $y = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$. Pisteen $C$ koordinaatit ovat siis $(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}})$

b) Verrataan kolmioiden $OBD$ ja $DEC$ sivujen suhteita $\frac{OB}{OD}$ ja $\frac{EC}{DE}$, toisin sanoen janojen $BD$ ja $DC$ kulmakertoimia.




Suorakulmaisesta kolmiosta $OTC$ Pythagoraan lauseella toisen ympyrän säde $TC$ on $\sqrt{t^2-1}$. Kohdan $a$) perusteella $EC = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$. Janan $DE$ pituus on $DT - EA - AT = \sqrt{t^2-1} - (1-\frac{1}{t}) - (t-1) = \sqrt{t^2-1} + \frac{1}{t}) - t = \frac{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}{t}$.
Nyt

$$\frac{EC}{DE} = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{t}{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cdot \frac{t}{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2-1}}{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{-(\sqrt{t^2-1})^2+t(\sqrt{t^2-1})} = \frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}$$

ja

$$\frac{OB}{OD} = \frac{1}{OD} = \frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}.$$

Kulmakertoimet ovat samat, siispä pisteet $B, D$ ja $C$ ovat samalla suoralla.