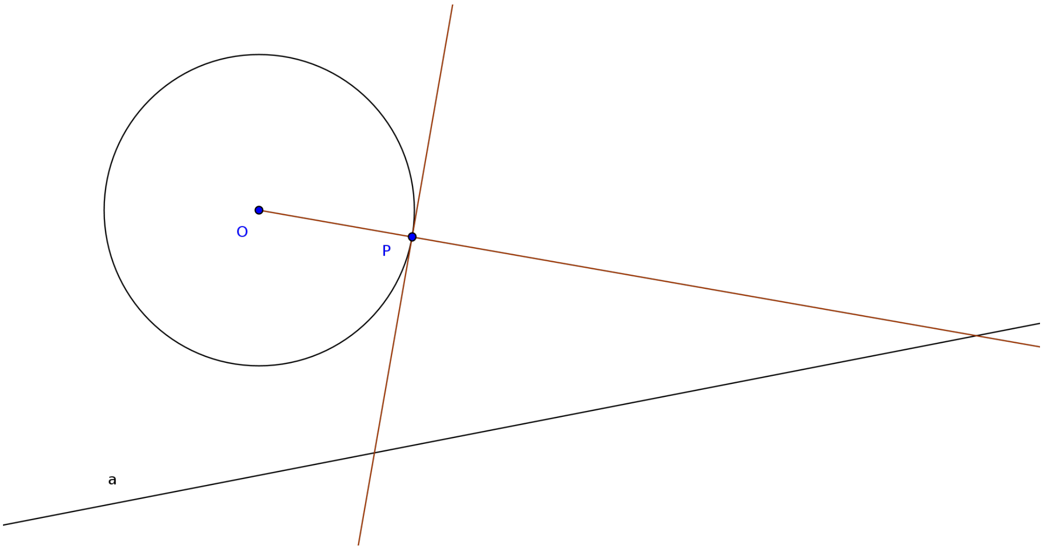
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 7
16.3. alkavalle viikolle

1. Olkoon Γ O-keskinen ympyrä ja a suora, joka ei leikkaa (eikä sivua) ympyrää Γ. Olkoon $P \in \Gamma$ siten, että $OP \not\perp a$. Konstruoi harpilla ja viivaimella ympyrä, joka sivuaa ympyrää Γ pisteessä P, ja sivuaa suoraa a jossakin pisteessä.

   Eräs ratkaisu.

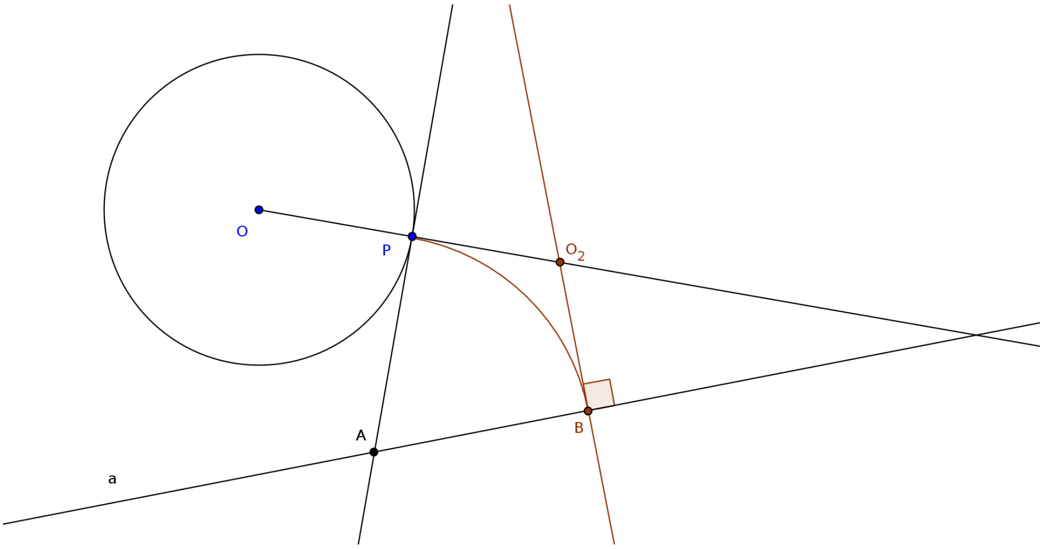
   Piirretään suora OP: Lehtisen materiaalin piirto-ohje 1.7.1.

   Piirretään suoralle OP normaali pisteen P kautta: 1.7.9. Se leikkaa suoran a pisteessä A.



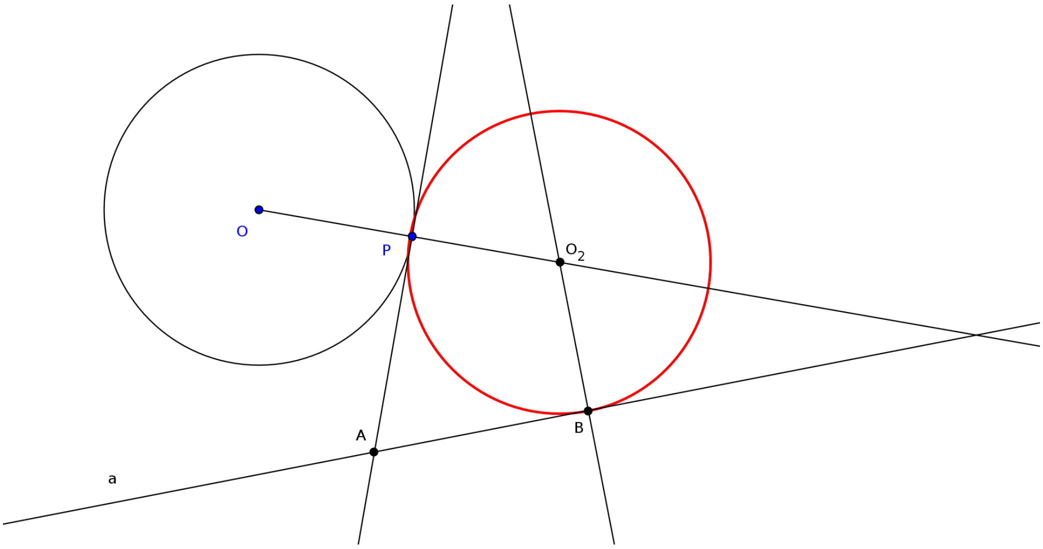
   Erotetaan janan $\overline{AP}$ kanssa yhtenevä jana $\overline{AB}$ siltä puolisuoralta, joka on suoralla a, jonka päätepiste on A ja joka on eri puolella suoraa AP kuin O: 1.7.4.

   Piirretään suoralle a normaali pisteen B kautta: 1.7.9. Se leikkaa suoran OP pisteessä O_2.



Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on O_2 ja joka sisältää pisteen O_2: 1.7.2.

Tämä ympyrä on etsitty ympyrä.



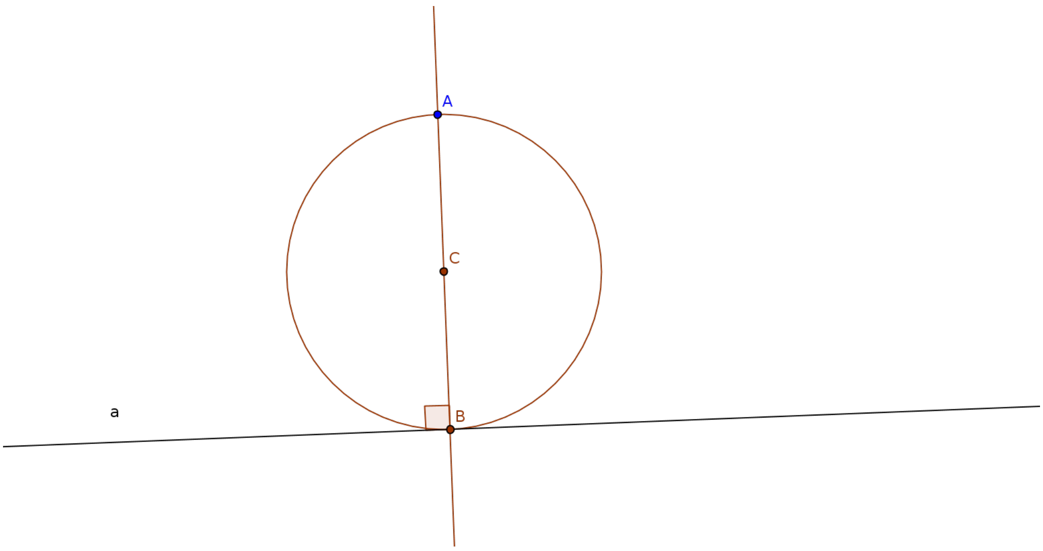
2. Olkoon a suora ja A piste, joka ei ole suoralla a. Konstruoi harpilla ja viivaimella sellainen ympyrä Γ, että $A \in \Gamma$ ja että suora a on ympyrän Γ tangentti.

   Ratkaisu.

Piirretään suoran a normaali pisteen A kautta: 1.7.9. Se leikkaa suoran a pisteessä B.

Puolitetaan jana $\overline{AB}$: 1.7.8. Sen keskipiste on C.

Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on C ja joka kulkee pisteen A kautta: 1.7.2.



3. Konstruoi harpin ja viivaimen avulla

   a) neliö

   b) säännöllinen kahdeksankulmio.

Ratkaisu.

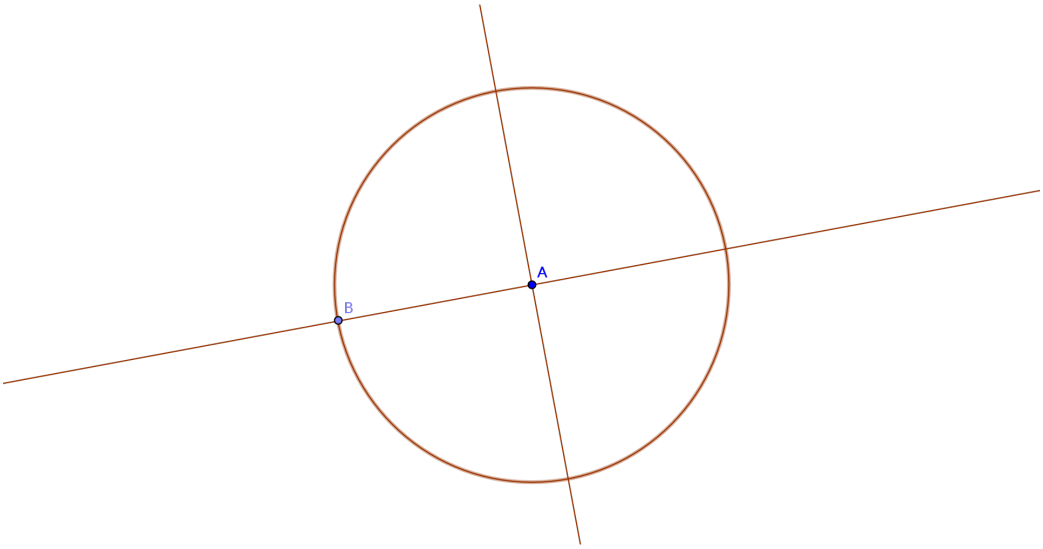
a) Olkoot A ja B kaksi eri pistettä. Piirretään niiden kautta kulkeva suora: 1.7.1.

   Piirretään suoran AB normaali pisteen A kautta: 1.7.9.

   Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on A ja joka kulkee pisteen B kautta: 1.7.2.

   Piirretään janat ympyrän ja kahden piirretyn suoran leikkauspisteiden välille: 1.7.1.

   Viimeiset neljä janaa muodostavat neliön.



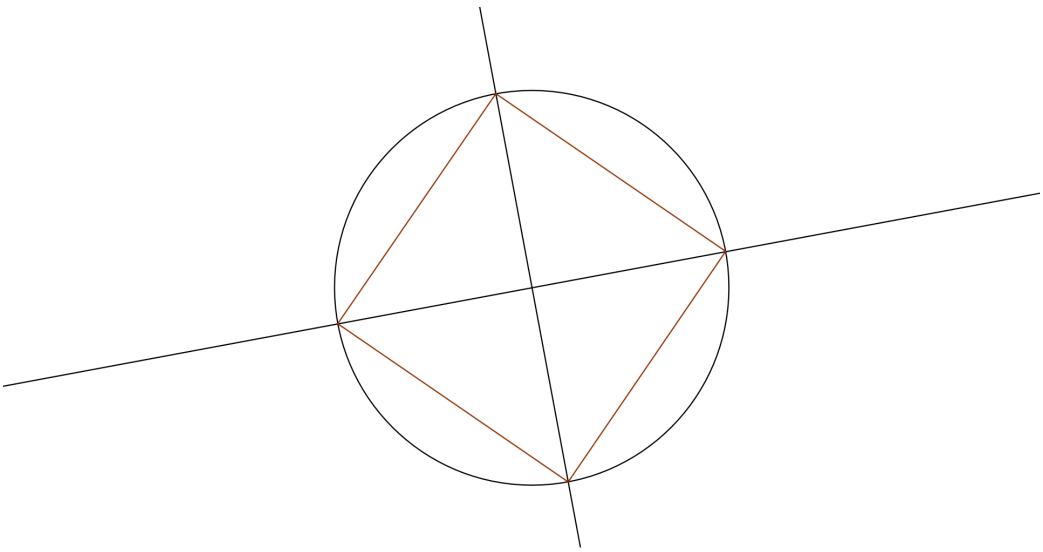
b) Piirretään ensin neliö (esimerkiksi kohdan a) tapaan).

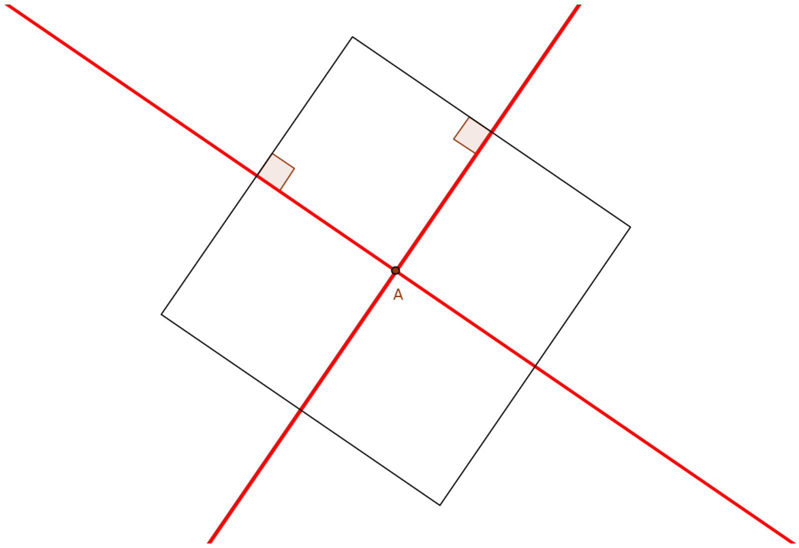
Piiretään sen sivuille keskinormaalit: 1.7.7. Ne leikkaavat pisteessä A.

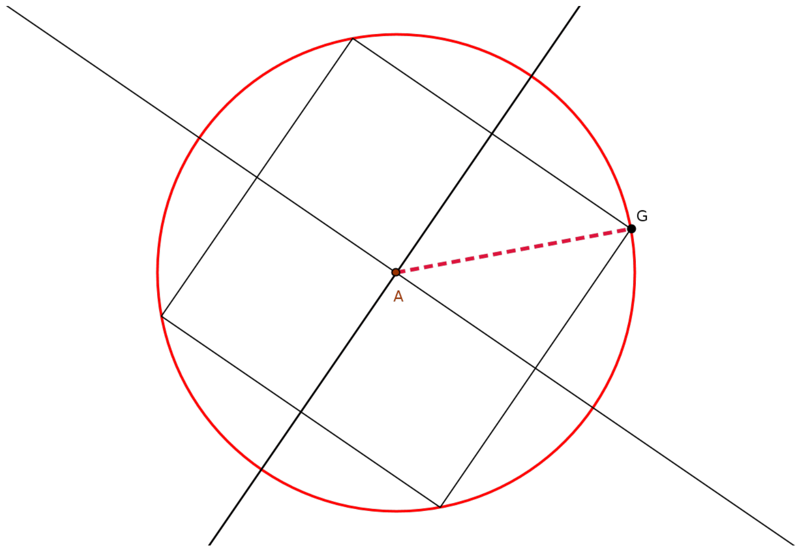
Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on A ja joka kulkee neliön kulman kautta: 1.7.2.

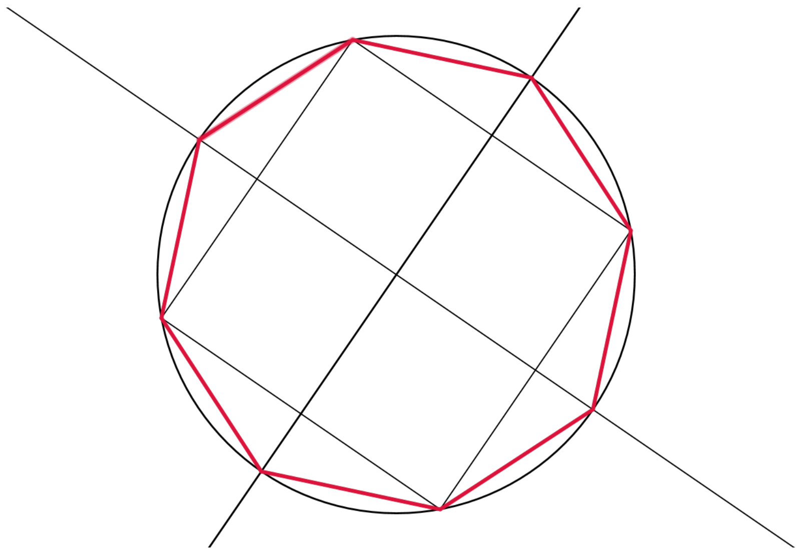
Piirretään janat, jotka yhdistävät keskinormaalien ja ympyrän leikkauspisteet lähimpiin neliön ja ympyrän leikkauspisteisiin: 1.7.1.

Nämä viimeksi piirretyt kahdeksan janaa muodostavat säännöllisen kahdeksankulmion.




A

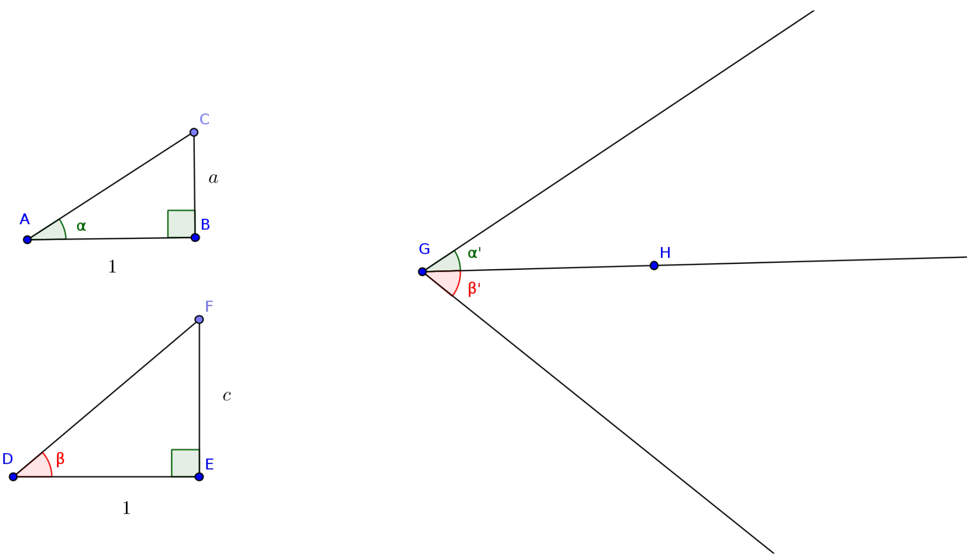

G
A



4. Osoita, että janojen tulo on *liitännäinen* eli että $(ab)c = a(bc)$.

   Ratkaisu. Olkoon a, b, c janojen ekvivalenssiluokkia. Konstruoidaan kolmio ABC niin, että $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = 1$ ja β on suora kulma, ja konstruoidaan kolmio DEF siten, että $\overline{EF} = c$, $\overline{DE} = 1$ ja kulma ϵ on suora.

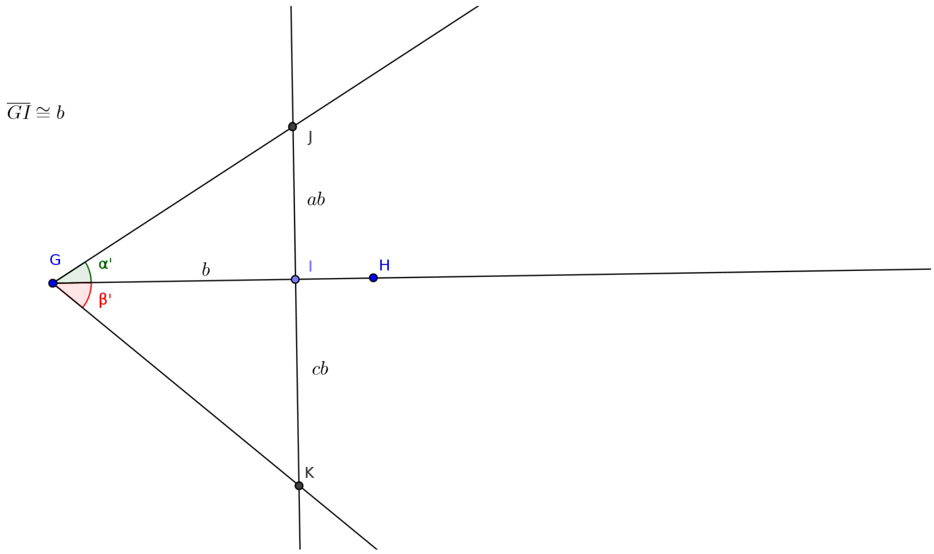
   Siirretään kulmat α ja β eri puolille (joidenkin) kahden pisteen G ja H määräämää puolisuoraa $\overrightarrow{GH}$.



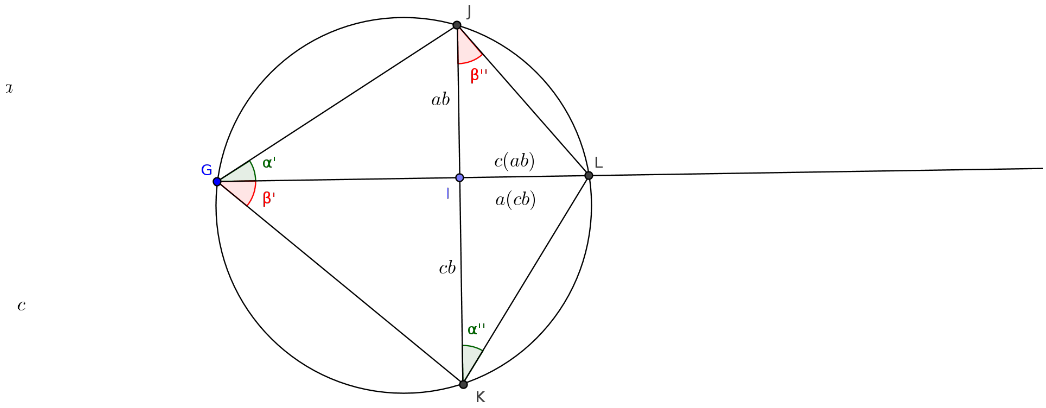
Olkoon I se puolisuoran $\overrightarrow{GH}$ piste, jolla $\overline{GI} = b$. Nimetään suoran

GH pisteen I kautta kulkevan normaalin ja siirretyn kulman α' toisen kyljen leikkauspistettä J, vastaavasti nimetään normaalin ja kulman β' toisen kyljen leikkauspiste K.

Nyt kolmiossa GIJ on kulma α', sivu b ja suora kulma, joten janojen tulon määritelmän mukaan kolmion sivu $\overline{IJ}$ on tulo ab. Samoin on kolmiossa GIK kulma β', sivu b ja suora kulma, joten sen sivu $\overline{IK}$ on määritelmän mukaan cb.



Kolmen pisteen J, G, K ympäri kulkee ympyrä, merkitään sen ja puolisuoran $\overrightarrow{GI}$ leikkauspistettä L.



Pisteet J, G, K, L ovat siis saman ympyrän pisteitä. Kehäkulmalauseen nojalla on nyt $\angle KGL \cong \angle KJL$ ja $\angle LGJ \cong \angle LKJ$.

Kolmiossa ILJ on siis kulma β'', sivu ab ja suora kulma, joten sen sivu $\overline{IL}$ on määritelmän mukaan tulo $c(ab)$. Samoin on kolmiossa KIL kulma α'', sivu cb ja suora kulma, joten sen sivu $\overline{IL}$ on määritelmän mukaan tulo $a(cb)$.

Janojen tulon vaihdannaisuuden perusteella saadaan nyt $(ab)c = c(ab) = a(cb) = a(bc)$. $\square$

5. (Harjoitus 2.2.3., [L]) Kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

ja $\alpha = \alpha'$. Osoita, että kolmiot ovat yhdenmuotoiset tai β ja β' ovat vieruskulmia.

Ratkaisu.

Olkoon kolmiot oletuksen mukaiset. Valitaan nyt piste D puolisuoralta $\overrightarrow{A'B'}$ siten, että $\angle A'B'D \cong \angle ACB$. Kolmioissa ABC ja $A'DC'$ on nyt yhtenevät kulmat $\alpha \cong \alpha'$ ja $\angle ACB \cong \angle A'C'D$, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).

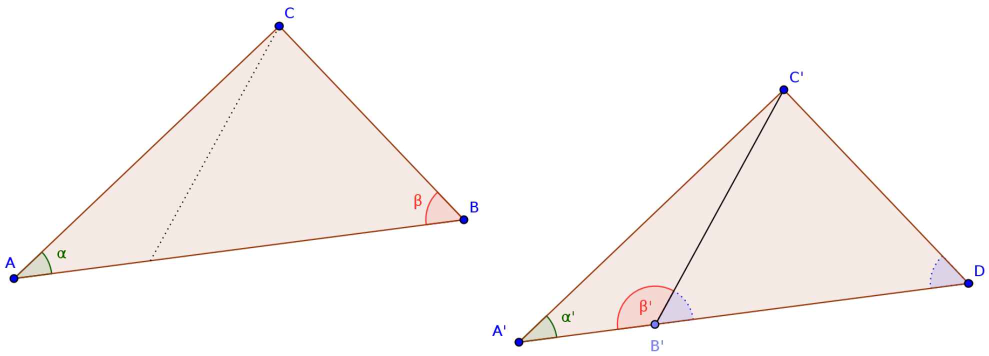
Jos $B' = D$, ovat siis kolmiot ABC ja $A'B'C'$ yhdenmuotoiset ja väite pätee. Oletetaan $B' \neq D$.

Yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja $A'DC'$ saadaan $\frac{\overline{DC'}}{b'} \cong \frac{a}{b}$, mistä $\overline{DC'} = \frac{b'}{b}a$. Toisaalta oletuksen mukaan $\frac{b}{a} \cong \frac{b'}{a'}$, mistä $\frac{b'}{b}a = a'$. Saadaan $\overline{DC'} = a'$.

Kolmio $DB'C'$ on siis tasakylkinen, joten $\angle C'B'D \cong \angle C'DB'$.

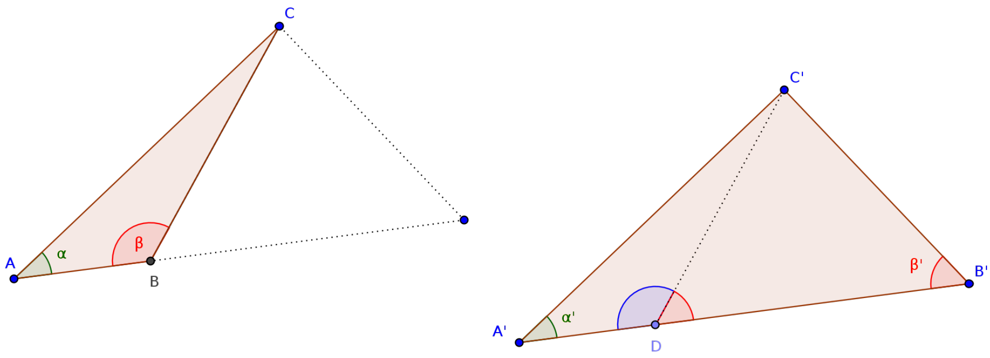
Nyt joko piste B' on pisteiden A' ja D välissä (tapaus i)) tai D on pisteiden A' ja B' välissä (tapaus ii)).

Tapaus i): Kulma $\angle DB'C'$ on kulman β' vieruskulma ja $\angle DB'C' \cong \angle C'DB' \cong \beta$, eli kulmat β ja β' ovat vieruskulmia.



Tapaus ii): Kulma $\angle C'DB'$ on kulman $\angle C'DA'$ vieruskulma, ja $\angle C'DA' \cong \beta$ sekä $\angle C'DB' \cong \beta'$, joten β ja β' ovat vieruskulmia.

$\square$

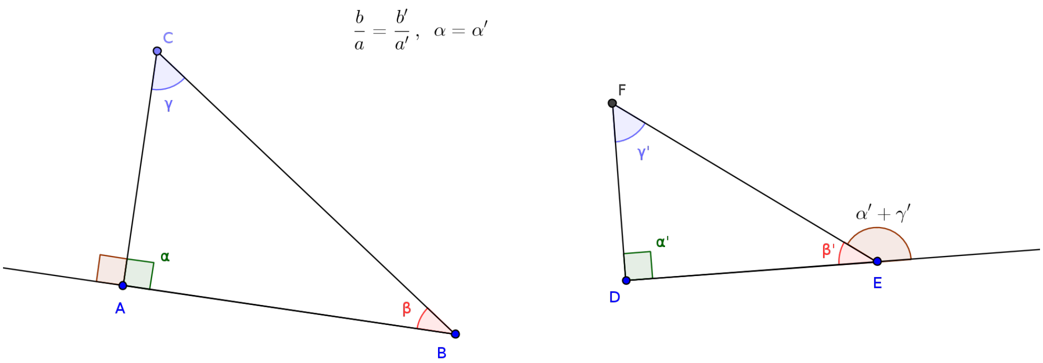


6. (Harjoitus 2.2.4., [L]) Jos kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ α ja α' ovat suoria kulmia ja
$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},$$
niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset. (*Vihje: käytä edellistä tehtävää.*)

Ratkaisu.

Edellisen tehtävän nojalla ovat nyt joko kolmiot yhdenmuotoisia tai sitten β ja β' vieruskulmia.

Oletetaan, että β ja β' ovat vieruskulmia.



Kulman α vieruskulma on määritelmän mukaan suora, ja koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi, on β suoraa kulmaa pienempi.

Kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, joten kulman β' vieruskulmana $\beta = \alpha' + \gamma'$, ja koska α' on suora, on β siis suoraa kulmaa suurempi. Ristiriita!

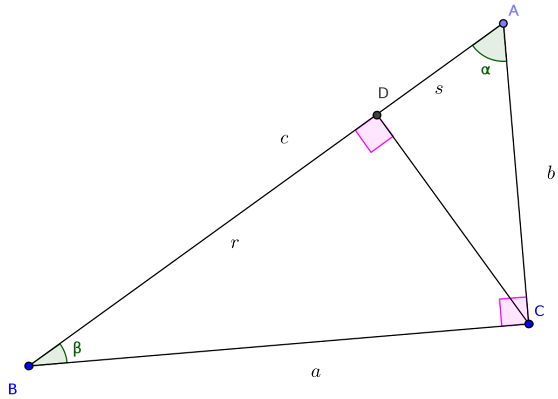
Kulmat β ja β' eivät siis ole vieruskulmia, joten kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoisia.

$\square$

7. (Harjoitus 2.2.5., [L]) Todista, että jos ABC on suorakulmainen kolmio ja kulma $\angle BCA$ on suora kulma, niin

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ratkaisu.



Olkoon D pisteen C kohtisuora projektio suoralle AB. Nimetään janoja $\overline{BD}$ ja $\overline{DA}$ nyt r ja s. Kolmioilla ABC ja CDB on yhtenevät kulmat β ja suora kulma, joten ne ovat yhdenmuotoiset (kk). Samoin Kolmioilla ABC ja ACD on yhtenevät kulmat α ja suora kulma, joten myös ne ovat yhdenmuotoiset (kk).

Yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja ACD saadaan $\frac{s}{b} = \frac{b}{c}$, mistä $cs = b^2$, ja yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja CDB saadaan $\frac{c}{a} = \frac{a}{r}$, mistä $cr = a^2$.

Nyt siis $a^2 + b^2 = cs + cr$, mistä osittelulakia ja tietoa $c = s + r$ käyttämällä saadaan $a^2 + b^2 = c(s + r) = c^2$. $\square$