MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Ratkaisuehdotukset harjoituksiin 12

Luennoilla (22. ja 24.4.) käsitellään äänestystuloksen perusteella Antiikin kolmea suurta ongelmaa. Moodlessa on C. R. Hadlockin kirjasta tähän liittyvä osuus. Viimeisissä laskareissa voidaan opiskelijoiden toiveiden mukaan käsitellä myös kertaustehtäviä (tulossa kurssisivulle viim. 27.4.!).

1. Osoita, että $K[\sqrt{k}]$ on suljettu jakolaskun suhteen.

   Ratkaisu.

   Olkoot $a, b, c, d \in K$, jolloin $a + b\sqrt{k} \in K[\sqrt{k}]$ ja $c + d\sqrt{k} \in K[\sqrt{k}]$. Näytetään, että $\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}} \in K[\sqrt{k}]$.

   i) Oletetaan, että $c - d\sqrt{k} \neq 0$.

$$\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}} = \frac{(a+b\sqrt{k})(c-d\sqrt{k})}{(c+d\sqrt{k})(c-d\sqrt{k})} = \frac{ac - ad\sqrt{k} + bc\sqrt{k} + bdk}{c^2 - k} = \frac{ac+bdk}{c^2-k} + \frac{bc-ad}{c^2-k}\sqrt{k}$$

   Kuntana K on suljettu laskutoimitustensa suhteen, joten $\frac{ac+bdk}{c^2-k} \in K$ ja $\frac{bc-ad}{c^2-k} \in K$, joten saatiin $\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}} \in K[\sqrt{k}]$.

   ii) Oletetaan nyt puolestaan, että $c - d\sqrt{k} = 0$.

   Nyt siis $d\sqrt{k} = c$ ja edelleen $\sqrt{k} = \frac{c}{d}$. Koska $c, d \in K$, on myös $\sqrt{k} = \frac{c}{d} \in K$. Kuntana K on suljettu laskutoimitustensa suhteen ja $a, b, c, d, \sqrt{k} \in K$, joten $\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}} \in K$.

   $\square$

2. Osoita, että luvut $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ eivät ole rationaalilukuja.

   Ratkaisu.

   Tehdään vastaoletus: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$ eikä luvuilla p, q ole yhteisiä tekijöitä.

   Nyt siis $2 = \frac{p^2}{q^2}$ ja edelleen $2q^2 = p^2$. Yhtälön vasen puoli on jaollinen kahdella, joten niin on myös sen oikea puoli, p^2. Koska p^2 on jaollinen kahdella, niin on myös p, eli $p = 2a$ jollain $a \in \mathbb{Z}$.

   Saadaan $2q^2 = (2a)^2$, eli $2q^2 = 4a^2$ ja siis $q^2 = 2a^2$. Nähdään, että myös q on jaollinen kahdella, mikä on vastoin oletusta - luvuilla on yhteinen tekijä 2. Ristiriita.

Siis $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aivan vastaavasti nähdään $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$:

Vastaoletus, $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$ eikä luvuilla p, q ole yhteisiä tekijöitä.

Nyt siis $3 = \frac{p^2}{q^2}$ ja edelleen $3q^2 = p^2$. Yhtälön vasen puoli on jaollinen kolmella, joten niin on myös sen oikea puoli, p^2. Koska p^2 on jaollinen kolmella, niin on myös p, eli $p = 3a$ jollain $a \in \mathbb{Z}$.

Saadaan $3q^2 = (3a)^2$, eli $3q^2 = 9a^2$ ja siis $q^2 = 3a^2$. Nähdään, että myös q on jaollinen kolmella, mikä on vastoin oletusta - luvuilla on yhteinen tekijä 3. Ristiriita.

Siis $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

Huomaa, että todistus toimii mille hyvänsä alkuluvulle, ei vain luvuille 2 ja 3.

3. Voiko kuution "kolmentaa"? *Vihje:* Tutki luvun $\sqrt[3]{3}$ rationaalisuutta.

   Ratkaisu.

   Luennoilla esitettiin todistus sille, ettei kuutiota voi kahdentaa. Kuution kolmentamisen mahdottomuus voidaan todeta aivan vastaavalla tavalla.

   Todistuksen pääkohdat ovat seuraavat:

1: Kuution kolmentaminen on yhtäpitävää sen kanssa, että luku ${}^3\sqrt{3}$ on konstruoitavissa: Tämä olisi särmän pituus kuutiossa, joka saataisiin yksikkösärmäisen kuution kolmentamisesta.

2: Luku on konstruoitavissa (jos ja) vain jos se on alkio jossain kunnassa $\mathbb{Q} \subset K_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{k_1}] \subset K_2 = K_1[\sqrt{k_2}] \subset \ldots$

3: Jos luku ${}^3\sqrt{3}$ kuuluu johonkin yllämainituista kuntalaajennoksista K_n, se kuuluu myös kuntaan K_{n-1}. (Ja siten lopulta myös kuntaan $\mathbb{Q}$.)

4: ${}^3\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

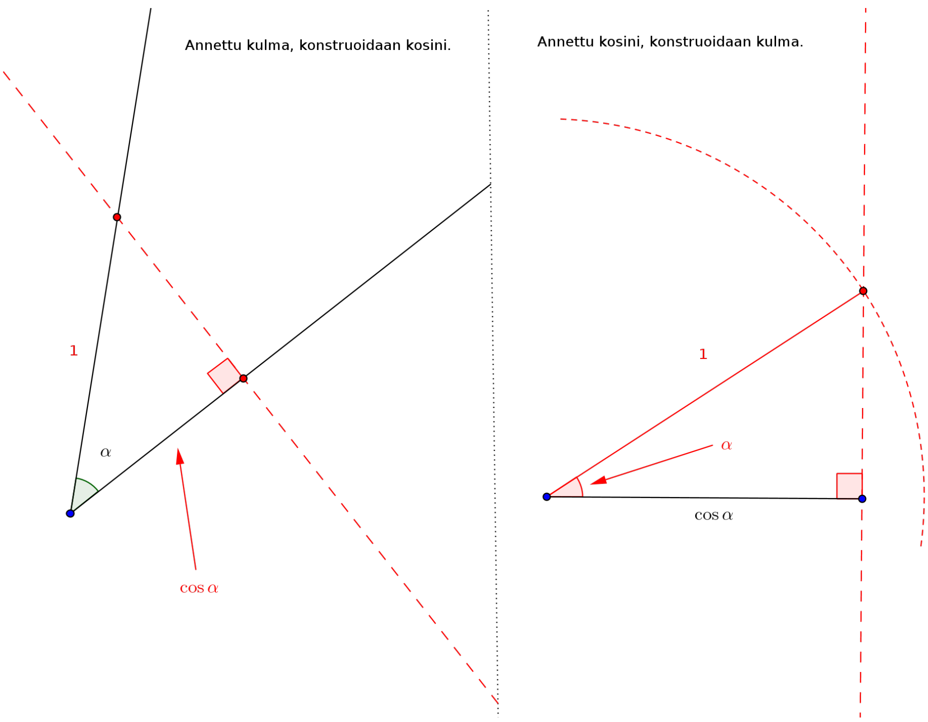
Nyt siis kohtien 4 ja 3 perusteella luku ei kuulu mihinkään kuvatunlaiseen kunnan $\mathbb{Q}$ kuntalaajennokseen, ja siten kohdan 2 perusteella se ei ole konstruoitavissa ja siten siis kohdan 1 perusteella kuutiota ei voi kolmentaa.

Kuution kahdentamisen käsittelyn yhteydessä kohta 3 perusteltiin apulauseella, joka koski ainoastaan lukua $\sqrt[3]{2}$. Todistus tässä tarvittavalle vastaavalle tulokselle luvulle $\sqrt[3]{3}$ saadaan tuon apulauseen todistuksesta suoraan, korvaamalla luvun 2 esiintymät luvulla 3.

4. Kulman kolmijakoa tutkiessamme saimme tuloksen $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Osoita algebran avulla (vastaava yhtälö luvulle $\cos 4\alpha$ rakentaen), että kulman ”nelijako” onnistuu aina.

   Ratkaisu.

   Käytetään hyväksi sitä tietoa, että jos on annettu kulma α, voidaan $\cos\alpha$ konstruoida, ja jos on annettu luku $\cos\alpha$, kulma α voidaan konstruoida (kts. oheinen kuva). Siis kulman α konstruoiminen kulmasta 4α onnistuu sikäli mikäli luvusta $\cos 4\alpha$ saadaan konstruoitua luku $\cos\alpha$.



   Oletetaan, että on annettu $\cos 4\alpha$ ja käytetään kosinin kaksinkertaisen kulman kaavaa kahdesti.

$$\cos 4\alpha = \cos(2\alpha+2\alpha) = 2\cos^2(2\alpha)-1 = 2(2\cos^2\alpha-1)^2-1 = 8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$$

Tästä

$$8(\cos^2\alpha)^2 - 8(\cos^2\alpha) + (1 - \cos 4\alpha) = 0,$$

ja toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\cos^2\alpha = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4\cdot 8(1-\cos 4\alpha)}}{16},$$

mistä edelleen

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 - 4\cdot 8(1-\cos 4\alpha)}}{16}}.$$

Nyt yhtälön oikealla puolella $\cos 4\alpha$ oli annettu, ja yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut samoin kuin neliöjuuret voidaan konstruoida; yhtälön oikea puoli on siis konstruoitavissa ja siten tietenkin myös sen vasen puoli.

□