MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
2. kurssikoe
Ratkaisuehdotuksia

Kokeessa saa käyttää kirjoitusvälineiden, laskimen ja MAOL:in lisäksi molemmin puolin käsinkirjoitettua A4:sta "lunttilappuna". Kaikissa tehtävissä saa käyttää kaikkia kurssilla esillä olleita lauseita.

Valitse tehtävistä 1-5 **neljä (4) tehtävää**!

1. Ovatko seuraavat väitteet **oikein** vai **väärin**? Vastauksia ei tarvitse perustella. *HUOM!* Vastaus oikein $\rightarrow$ 1 p., ei vastausta $\rightarrow$ 0 p., **väärä vastaus** $\rightarrow$ **-1 p.** (Mahdolliset miinuspisteet eivät kuitenkaan vähennä muiden tehtävien pisteitä eli minimipistemäärä tästä tehtävästä on 0 p.)

   a. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoiset, jos $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle BCA \cong \angle EFD$. OIKEIN.
   b. Kaikki yhtenevyyskuvaukset saadaan yhdisteinä peilauksista suoran tai pisteen yli, siirrosta ja kierrosta. OIKEIN.
   c. Inversio ei ole yhdenmuotoisuuskuvaus. OIKEIN.
   d. Pallogeometriassa suoran (eli pallon isoympyrän) ulkopuolella olevan pisteen kautta ei kulje yhtään sellaista suoraa (eli isoympyrää), joka leikkaisi alkuperäistä suoraa. VÄÄRIN.
   e. Kaikki P-suorat Poincarén (kiekko)mallissa ovat perusympyrän halkaisijoita. VÄÄRIN.
   f. Jos on annettu jana, jonka pituus on 1, niin on mahdollista konstruoida pelkästään harpilla ja viivaimella särmän pituus kuutiolle, jonka tilavuus on 3. VÄÄRIN.

2. a. Selitä esimerkin avulla mikä on *kultainen suhde*? (2 p.)
   b. Määritä jokin kuvaus, joka kuvaa tasasivuisen kolmion ABC tasasivuiseksi kolmioksi $A'B'C'$ siten, että kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ sivut ovat kultaisessa suhteessa. (4 p.)

   Ratkaisuehdotus.

   a. Olkoon $a > b$. Jana $a + b$ on jaettu kultaisessa suhteessa, jos
$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

b. Olkoon ϕ kultainen suhde. Olkoon ABC tasasivuinen kolmio ja O sen keskipiste. Määritellään homotetia $f_{O,\phi}$ (O homotetiakeskus, ϕ homotetiasuhde). Nyt pisteet A, B, C kuvautuvat pisteiksi A', B', C' siten, että

$$\frac{|\overline{OA'}|}{|\overline{OA}|} = \phi \quad jne.$$

ja kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoisia, sillä homotetia on yhdenmuotoisuskuvaus. Koska yhdenmuotoisissa kuvioissa vastinjanat ovat samassa suhteessa, niin kolmioiden sivut ovat myöskin kultaisessa suhteessa eli

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \phi \quad jne.$$

Huom! Mikä tahansa homotetia, jonka homotetiasuhde on ϕ kelpaa! Toisin sanoen, homotetiakeskuksen sijainnilla ei ole väliä!

3. Olkoon $f_{O,r}$ inversio O-keskisen, r-säteisen ympyrän Γ suhteen. Olkoon $f_{O,R}$ inversio O-keskisen, R-säteisen ympyrän Γ' suhteen. (Ympyröillä Γ ja Γ' on siis sama keskipiste.) Osoita, että yhdistetty kuvaus $f_{O,r} \circ f_{O,R}$ on homotetia. (6 p.)

Ratkaisuehdotus. Inversion $f_{O,r}$ määritelmän mukaan kaikilla $P \neq O$ pätee

- $f_{O,r}(P) \in \overrightarrow{OP}$,
- $|\overline{OP}| \cdot |\overline{Of_{O,r}(P)}| = r^2$.

Homotetian $f_{O,k}$ määritelmän mukaan $f_{O,k}(O) = O$ ja kaikilla $P \neq O$ pätee

- $f_{O,r}(P) \in \overrightarrow{OP}$,
- $\frac{|\overline{Of_{O,r}(P)}|}{|\overline{OP}|} = k$.

Halutaan siis osoittaa, että kuvaukselle

$$f_{O,r} \circ f_{O,R} =: f$$

pätee homotetian määräävät ominaisuudet. Koska inversio on määritelty $\tau \setminus O \longrightarrow \tau \setminus O$, niin voidaan asettaa $f(O) = O$ eli O on kuvauksen f *homotetiakeskus.* Inversion määritelmän mukaan kaikilla $P, Q \neq O$

pätee $f_{O,R}(P) \in \overrightarrow{OP}$ ja $f_{O,R}(Q) \in \overrightarrow{OQ}$. Olkoon $Q = f_{O,R}(P)(\neq O)$. Nyt $f_{O,r}\big(f_{O,R}(P)\big) \in \overrightarrow{Of_{O,R}(P)}$. Koska $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Of_{O,R}(P)}$, niin

$$f_{O,r} \circ f_{O,R}(P) = f(P) \in \overrightarrow{OP}$$

kaikilla $P \neq O$.

Toisaalta, inversion määritelmän mukaan kaikilla $P, Q \neq O$

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{Of_{O,R}(P)}| = R^2$$

ja

$$|\overline{OQ}| \cdot |\overline{Of_{O,r}(Q)}| = r^2.$$

Kun $Q = f_{O,R}(P)$, niin

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{|\overline{Of_{O,R}(P)}| \cdot |\overline{Of_{O,r}\big(f_{O,R}(P)\big)}|}{|\overline{OP}| \cdot |\overline{Of_{O,R}(P)}|} = \frac{|\overline{Of_{O,r}\big(f_{O,R}(P)\big)}|}{|\overline{OP}|}.$$

Näin ollen

$$\frac{|\overline{Of(P)}|}{|\overline{OP}|} = \frac{r^2}{R^2}\big(= \text{ vakio}\big).$$

Siis, f on homotetia, homotetiakeskuksena O ja homotetiasuhteena $\frac{r^2}{R^2}$.

4. a. Mikä on *kolmion kulmavaje*? Miten voit erottaa *elliptisen, euklidisen* ja *hyperbolisen* geometrian toisistaan kolmion kulmavajeen avulla? (4 p.)

   b. Minkälainen euklidisen tason osajoukko on Poincarén (kiekko)mallin P-suora, joka ei kulje mallin perusympyrän keskipisteen kautta? (2 p.)

Ratkaisuehdotus.

a. Olkoon ABC kolmio. Kolmion kulmavaje on luku $\delta(ABC) = 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$. **(1 p.)** Elliptisessa geometriassa kulmavaje (kaikille kolmioille) on $\delta < 0$, euklidisessa $\delta = 0$ ja hyperbolisessa $\delta > 0$. **(1 p./kohta)**

b. P-suora, joka ei kulje perusympyrän keskipisteen kautta on se osa perusympyrää kohtisuorasti leikkaavasta ympyrästä **(1 p.)**, joka jää perusympyrän sisään. **(1 p.)**

5. a. Onko kuvaus $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + 3, y + 3)$, homotetia? Perustele. (3 p.)

b. Onko piste $(0, 3)$ pisteen $(0, 1/3)$ kuva inversiossa yksikköympyrän suhteen? Perustele. (3 p.)

Ratkaisuehdotus.

a. Kuvaus $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + 3, y + 3)$, **ei ole** homotetia. Jos g olisi homotetia, niin olisi olemassa piste (homotetiakeskus) (x_0, y_0), jolle

$$g(x_0, y_0) = (x_0 + 3, y_0 + 3) = (x_0, y_0).$$

Mutta tällöin pitäisi päteä $x_0+3 = x_0$ ja $y_0+3 = y_0$. Ristiriita! (Ei ole olemassa reaalilukuparia (x_0, y_0), jolle eo. yhtälöt pätisivät.)

b. Piste $A' = (0, 3)$ **on** pisteen $A = (0, 1/3)$ kuva inversiossa yksikköympyrän ($O = (0, 0)$, $r = 1$) suhteen, sillä

$$\begin{aligned} |\overline{OA'}| \cdot |\overline{OA}| &= \sqrt{(1/3 - 0)^2 + (0 - 0)^2} \cdot \sqrt{(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 = r^2. \end{aligned}$$

ja piste A' kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{OA}$ (pisteet A, A' kuuluvat suoralle $x = 0$ ja ovat samalla puolella pistettä O).

Molemmissa kohdissa: vastaus oikein $\longrightarrow$ **1 p.**, perustelu oikein $\longrightarrow$ **2 p.**