

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria, kevät 2015

Harjoitus 8

23.3. alkavalle viikolle

1. Luennolla (ke 18.3.) osoitettiin, että kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakaa kulman vastaisen sivun ulkopuolisesti viereisten sivujen suhteessa. Osoita, että kyseisen kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun samassa suhteessa.

Vihje: Ol. ABC kolmio ja $P \in \overline{BC}$ siten, että \overrightarrow{AP} puolittaa kulman α . Piirrä sivun \overline{AC} kanssa yhdensuuntainen jana \overline{BE} , missä $E \in \overrightarrow{AP}$ ja etsi yhdenmuotoisia kolmioita.

2. (Harjoitus 2.3.3., [L]) Olkoon M janan BC keskipiste ja $P \neq M$. Olkoon Q se suoran BC piste, joka jakaa janan BC ulkopuolisesti suhteess $\frac{BP}{PC}$. Osoite, että niiden pisteiden X joukko, joille

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}},$$

on ympyrä Γ , jonka halkaisija on PQ .

3. (Harjoitus 2.3.5., [L]) Osoita, että jos O on r -säteisen ympyrän Γ keskipiste ja $OA = d$, niin pisteen A potenssi Γ :n suhteen on $|r^2 - d^2|$.
4. (Harjoitus 2.3.8., [L]) Osoita, että jos O_1 ja O_2 ($O_1 \neq O_2$) ovat Γ_1 :n ja Γ_2 :n keskipisteet ja Γ_1 ja Γ_2 eivät leikkaa, niin niiden radikaaliakseli on eräs suoraa O_1O_2 vastaan kohtisuora suora.
5. (Harjoitus 2.3.10., [L]) Osoita, että kolmion *painopiste* (= keskijanojen leikkauspiste) jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2 : 1.
6. Jaetaan jana kultaisella leikkauksella osiin a ja b . Oletetaan, että $b > a$ ja jaetaan b edelleen kultaisella leikkauksella osiin c ja d , $d > c$. Osoita, että $d = a$.
- 7.* *Fibonacciin lukujono* $(F_n)_{n=1}^\infty (1,1,2,3,5, \dots)$ määritellään rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ kaikilla } n \geq 3.$$

Osoita induktiolla, että

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

missä $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on *kultainen suhde*.

Vihje: Osoita tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ alkuaskeleina erikseen ja tapaukset $n \geq 3$ induktiolla. Käytä tietoa $\varphi^2 = \varphi + 1$ ja $(1 - \varphi)^2 = 2 - \varphi$.

- 8.* Tehtävän 2 ympyrä on ns. Apolloniuksen ympyrä. Selvitä mikä on *Apolloniuksen ympyräparvi* (esim. googlettamalla 'Apollonian circles'), piirrä niistä muutamia ja etsi ympyräparven kaikille ympyräpareille yhteinen radikaaliakseli.