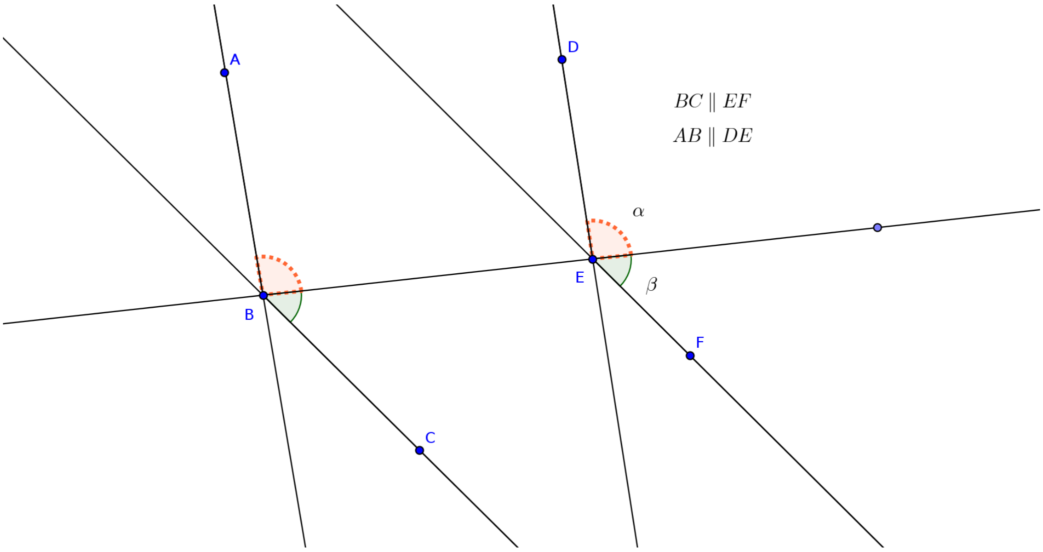
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 4
9.2. alkavalle viikolle

1. (Harjoitus 1.5.3., [L]) Kulmille $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ pätee seuraavaa: $AB||DE$, $CB||FE$ ja A ja D ovat samalla puolella suoraa BE sekä C ja F ovat samalla puolella suoraa BE. Osoita, että $\angle ABC \cong \angle DEF$.

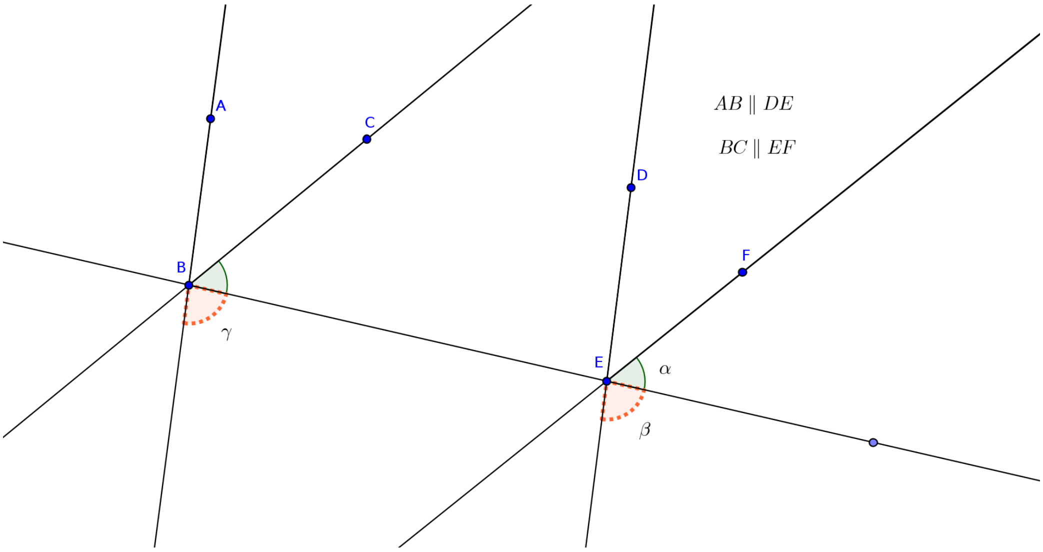
   Ratkaisu. Erotetaan todistus kahteen tapaukseen sen perusteella, ovatko pisteet A ja C keskenään samalla vai eri puolella suoraa BE.

   i) Oletetaan, että A ja D ovat eri puolilla suoraa BE kuin C ja F.



   Puolisuoran $\overrightarrow{EB}$ vastakkaisen puolisuoran sekä puolisuoran $\overrightarrow{ED}$ muodostama kulma α ja $\angle ABE$ ovat samankohtaiset kulmat ja lisäksi $AB \parallel DE$, joten lauseen 1.5.3. nojalla kulmat ovat yhtenevät. Samoin ovat samankohtaisia $\angle CBE$ ja puolisuoran $\overrightarrow{EF}$ sekä puolisuoran $\overrightarrow{EB}$ vastakkaisen puolisuoran muodostama kulma β, ja $BC \parallel EF$, joten nämäkin kulmat ovat yhtenevät (lause 1.5.3). Nyt lauseen 1.4.6. nojalla $\angle ABC \cong \angle DEF$.

   ii) Oletetaan, että A,D,C ja F ovat kaikki samalla puolella suoraa BE.
   Puolisuoran $\overrightarrow{EB}$ vastakkaisen puolisuoran sekä puolisuoran $\overrightarrow{EF}$ muodostama kulma α ja $\angle CBE$ ovat samankohtaiset kulmat, lisäksi $BC \parallel EF$, joten kulmat ovat yhtenevät (lause 1.5.3).



Samoin puolisuoran $\overrightarrow{ED}$ vastakkaisen puolisuoran sekä puolisuoran $\overrightarrow{EB}$ vastakkaisen puolisuoran muodostama kulma β on samankohtainen puolisuoran $\overrightarrow{BE}$ ja puolisuoran $\overrightarrow{BA}$ vastakkaisen puolisuoran muodostaman kulman γ kanssa, lisäksi $AB \parallel DE$, joten kulmat ovat yhtenevät (lause 1.5.3).

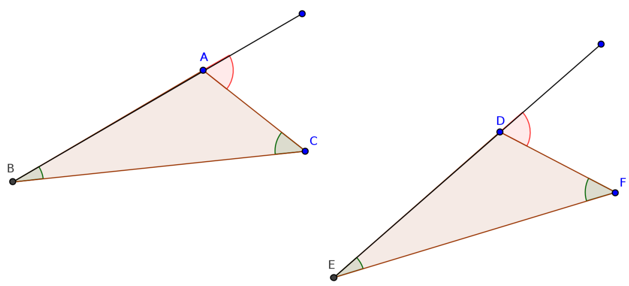
Nyt lauseen 1.4.6. nojalla kulman $\angle ABC$ vieruskulma $(\gamma + \angle CBE)$ ja kulman $\angle DEF$ vieruskulma $(\alpha + \beta)$ ovat yhtenevät ja siten lauseen 1.4.4. nojalla $\angle ABC \cong \angle DEF$. $\square$

2. (Harjoitus 1.5.4., [L]) Osoita: jos kolmioissa ABC ja DEF on kaksi paria keskenään yhteneviä kulmia, niin kolmioiden kolmannetkin kulmat ovat keskenään yhtenevät. *Ratkaisu.* Olkoon kolmioissa ABC ja DEF yhtenevät kulmat $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle BCA \cong \angle EFD$. Lauseen 1.5.4. nojalla kolmion ABC kulman $\angle CAB$ vieruskulma on $\angle ABC + \angle BCA$ ja kolmion DEF kulman $\angle FDE$ vieruskulma on $\angle DEF + \angle EFD$. Koska $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle BCA \cong \angle EFD$, ovat lauseen 1.4.6. nojalla kulmien $\angle CAB$ ja $\angle FDE$ vieruskulmat yhtenevät ja siten lauseen 1.4.4. nojalla $\angle CAB \cong \angle FDE$. $\square$

3. (Harjoitus 1.5.6., [L]) Olkoon $ABCD$ yksinkertainen nelikulmio. Osoita, että seuraavat ehdot ovat kukin välttämättömiä ja riittäviä sille, että $ABCD$ on suunnikas.

   (1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ja $AB||CD$.

   (2) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ja $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.



(3) $\overline{AC}$:n ja $\overline{BD}$:n leikkauspiste on kummankin janan keskipiste.

Ratkaisu. Turhan toiston välttämiseksi näytetään ennen kohtien (1)-(3) läpikäyntiä kaikissa kohdissa käytettävä aputulos.

Olkoon $ABCD$ suunnikas. Tarkastellaan kolmioita ABC ja CDA. Suorat AD ja BC ovat yhdensuuntaiset ja $\angle DAC$ sekä kulman $\angle BCA$ ristikulma ovat samankohtaiset, joten $\angle DAC \cong \angle BCA$ (ristikulmat, kulmien yhtenevyyden transitiivisuus, samankohtaisuus).

Vastaavasti suorat AB ja DC ovat yhdensuuntaiset ja $\angle DCA$ sekä kulman $\angle BAC$ ristikulma ovat samankohtaiset, joten $\angle DCA \cong \angle BAC$ (samankohtaisten kulmien yhtenevyys yhdensuuntaisilla suorilla: lause 1.5.3, ristikulmat: lause 1.4.5., kulmien yhtenevyyden transitiivisuus: aksiooma 11).

Nyt kolmioilla ABC ja CDA on yhtenevät kulmat $\angle BAC \cong \angle DCA$, yhtenevät sivut $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ ja vielä yhtenevät kulmat $\angle ACB \cong \angle CAD$, joten lauseen 1.4.3. (ksk) nojalla kolmiot ovat yhtenevät. Siis:

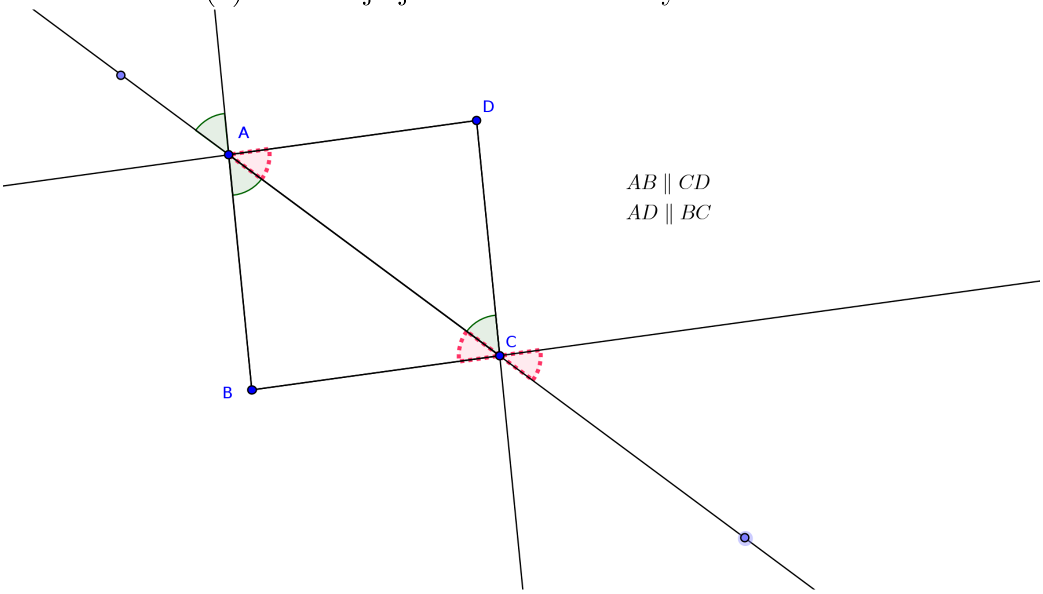
(*) Suunnikkaassa $ABCD$ on $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

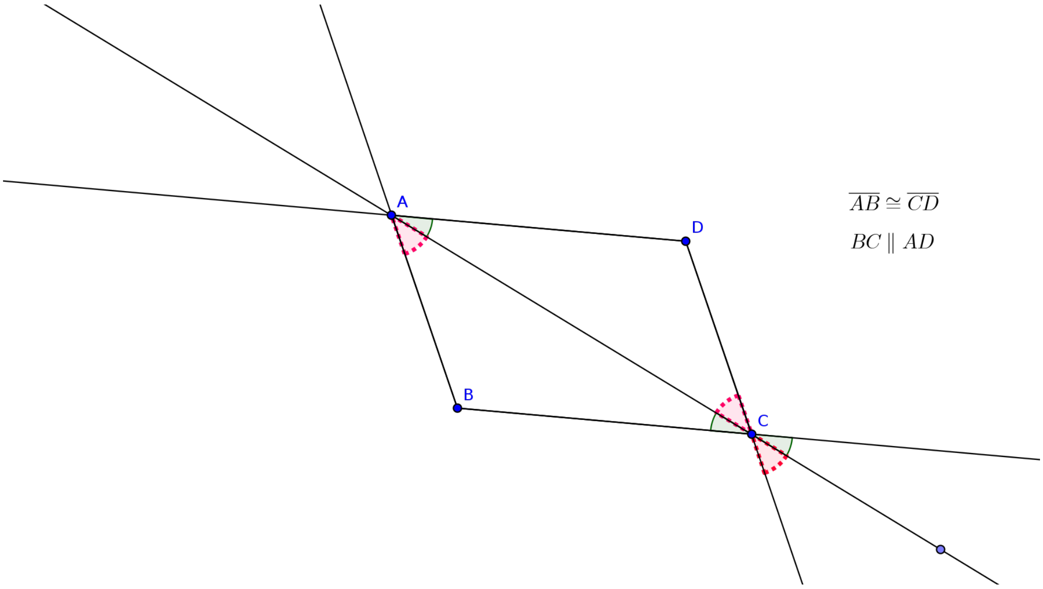
Näytetään sitten ehtojen (1)-(3) riittävyys ja välttämättömyys.

(1) Ehdon riittävyys: Olkoon $ABCD$ on yksinkertainen nelikulmio, jolle $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ja $AB \parallel CD$. Kulma $\angle CAB$ ja kulman $\angle ACD$ ristikulma ovat samankohtaisia kulmia ja $AB \parallel CD$, joten $\angle CAB \cong \angle ACD$ (lause 1.5.3, lause 1.4.5., aksiooma 11).

Nyt kolmioissa ABC ja CAD on yhtenevät sivut $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, yhtenevät kulmat $\angle BAC \cong \angle DCA$ ja toiset yhtenevät sivut $\overline{AC} \cong$

Kuva 1: (*): Lävistäjä jakaa suunnikkaan yhteneviin kolmioihin





$\overline{CA}$, joten lauseen 1.4.2. (sks) nojalla ne ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyyden nojalla $\angle DAC \cong \angle BCA$, ja $\angle DAC$ on samankohtainen kulman $\angle BCA$ ristikulman kanssa, joten $AD \parallel BC$ (yhdensuuntaiset suorat, ristikulmat).

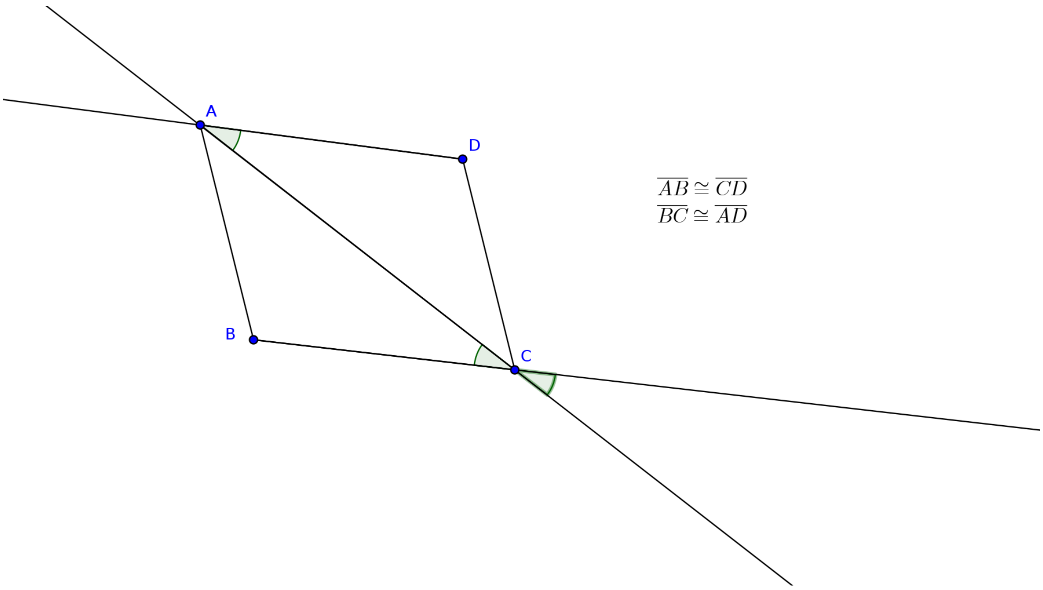
Siis $ABCD$ on suunnikas.

Ehdon välttämättömyys: Olkoon nyt $ABCD$ suunnikas. Pätee siis

$AB \parallel CD$, pitää vain näyttää $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Tuloksen $(*)$ nojalla $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

(2) Ehdon riittävyys: Olkoon $ABCD$ yksinkertainen nelikulmio, jossa $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ja $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

Nyt kolmioissa ABC ja CDA on kolme yhtenevää sivua, joten lauseen 1.4.12. (sss) nojalla ne ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyyden nojalla $\angle BCA \cong \angle DAC$ ja lisäksi kulman $\angle BCA$ ristikulma ja $\angle DAC$ ovat samankohtaisia kulmia, joten $AD \parallel BC$ (lause 1.4.5., aksiooma 11, lause 1.5.1).



Aivan samoin nähdään $AB \parallel CD$: kolmioiden yhtenevyyden nojalla $\angle CAB \cong \angle ACD$ ja lisäksi $\angle CAB$ ja kulman $\angle ACD$ ristikulma ovat samankohtaisia kulmia, joten suorien yhdensuuntaisuus seuraa lauseesta 1.5.1. (sekä lauseesta 1.4.5. ja aksioomasta 11).

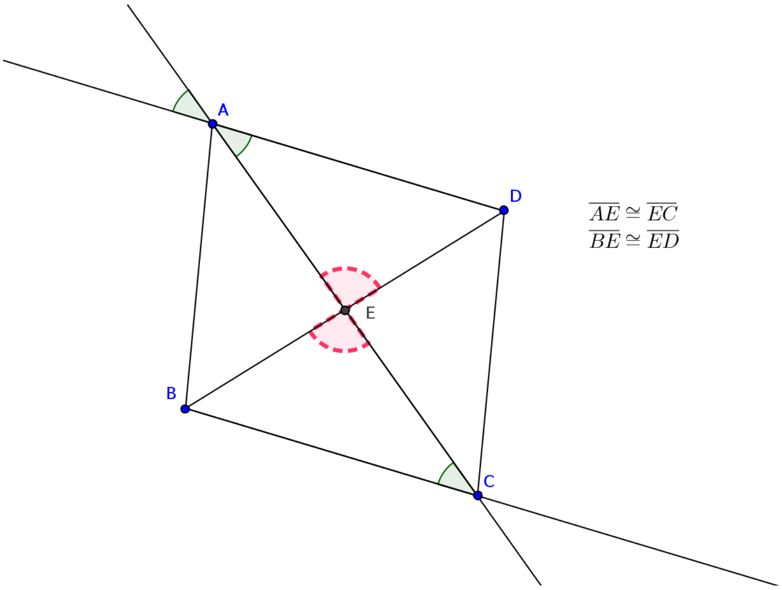
Siis $ABCD$ on suunnikas.

Ehdon välttämättömyys: Olkoon nyt $ABCD$ suunnikas.

Tuloksen $(*)$ mukaan $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Kolmioiden yhtenevyyden nojalla on $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ja $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

(3) Ehdon riittävyys: Olkoon $ABCD$ yksinkertainen nelikulmio, jossa janojen $\overline{AC}$ ja $\overline{BD}$ leikkauspiste on kummankin janan keskipiste.

Kolmioissa BEC ja DEA on yhtenevät sivut $\overline{BE} \cong \overline{ED}$, yhtenevät kulmat $\angle DEA \cong \angle BEC$ (lause 1.4.5.) ja yhtenevät sivut $\overline{EC} \cong \overline{AE}$, joten ne ovat lauseen 1.4.2. (sks) nojalla yhtene-



vät. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\angle BCE \cong \angle DAE$. Kulmat $\angle BCE$ ja kulman $\angle DAE$ ristikulma ovat samankohtaiset ja yhtenevät, joten lauseen 1.5.1. (ja lauseen 1.4.5. sekä aksiooman 11) nojalla $AD \parallel BC$.

Samoin nähdään $AB \parallel DC$: Kolmioissa BEA ja DEC on yhtenevät sivut $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, yhtenevät kulmat $\angle AEB \cong \angle CED$ (lause 1.4.5.) ja yhtenevät sivut $\overline{EB} \cong \overline{ED}$, joten ne ovat lauseen 1.4.2. (sks) nojalla yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\angle EBA \cong \angle EDC$. Kulmat $\angle EBA$ ja kulman $\angle EDC$ ristikulma ovat samankohtaiset ja yhtenevät, joten yhdensuuntaisuus seuraa lauseesta 1.4.1. (sekä lauseesta 1.4.5. ja aksioomasta 11).

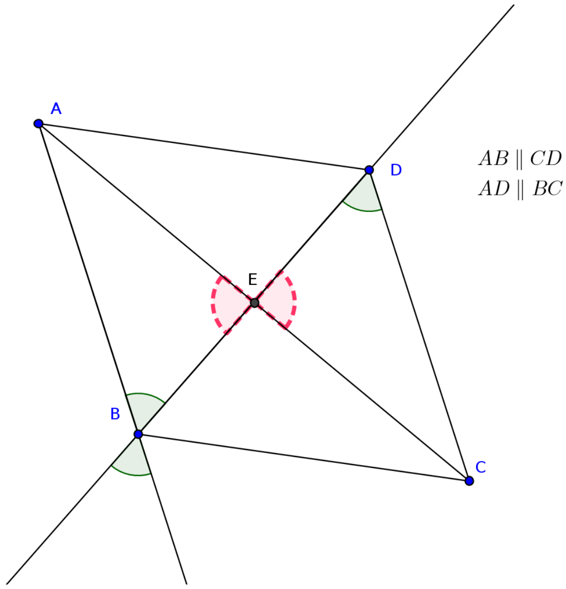
Siis $ABCD$ on suunnikas.

Ehdon välttämättömyys: Olkoon nyt $ABCD$ suunnikas.

Kulmat $\angle CED$ ja $\angle AEB$ ovat ristikulmina yhtenevät (lause 1.4.5). Kulman $\angle EBA$ ristikulma ja $\angle EDC$ ovat samankohtaisia ja $DC \parallel AB$, joten $\angle EBA \cong \angle EDC$ (lause 1.5.3, lause 1.4.5., aksiooma 11). Tuloksen $(*)$ mukaan kolmiot ABC ja CDA ovat yhtenevät, joten lisäksi vielä $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Lauseen 1.4.9. (kks) nojalla siis kolmiot AEB ja CED ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ ja $\overline{EB} \cong \overline{ED}$.

□

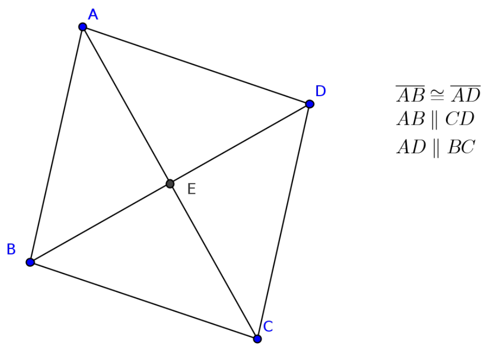
4. (Harjoitus 1.5.7., [L]) Osoita, että suunnikas $ABCD$ on neljäkäs, jos ja vain jos $AC \perp BD$.



Ratkaisu. $\Leftarrow$: Olkoon $ABCD$ suunnikas, jonka lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Harjoituksen 3 nojalla lävistäjien leikkauspiste E on molempien lävistäjien keskipiste, eli $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ ja $\overline{BE} \cong \overline{ED}$.

Nyt kolmioissa ABE ja ADE on yhtenevät sivut $\overline{BE} \cong \overline{DE}$, yhtenevät (suorat) kulmat $\angle DEA \cong \angle BEA$ ja yhtenevät sivut $\overline{EA} \cong \overline{EA}$, joten lauseen 1.4.2. (sks) nojalla kolmiot ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

$\Rightarrow$: Olkoon suunnikas $ABCD$ neljäkäs, eli $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.



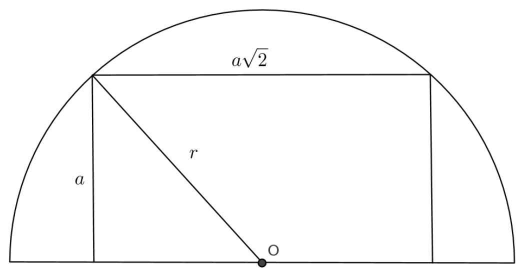
Harjoituksen 3 nojalla suunnikkaan $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste E on lävistäjien keskipiste, eli $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ ja $\overline{BE} \cong \overline{ED}$. Nyt siis kolmioissa ABE ja ADE on kolme yhtenevää sivua, joten lauseen 1.4.12. (sss) nojalla ne ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyyden perusteella vieruskulmat $\angle BEA \cong \angle AED$, eli ne ovat suoria kulmia, eli suorat AC ja BD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$

HUOM! Tehtävien 5-7 ratkaisut löytyvät Moodlesta!

5. (YO-tehtävä, K2010) Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?

Ratkaisu. Olkoot kuution särmän pituus a ja puolipallon säde r.

Kuva 2: Pystysuora poikkileikkaus kuution pohjatahkon lävistäjää myöten



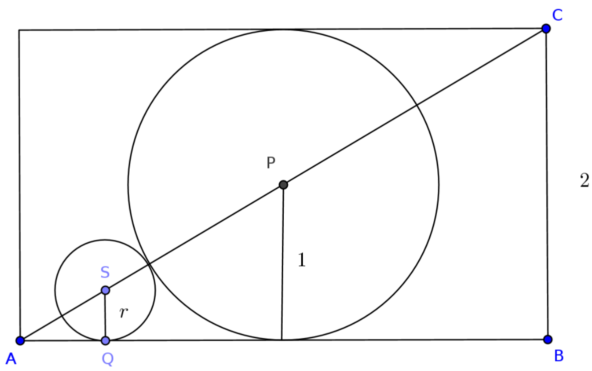
Puolipallon säde on etäisyys sen keskipisteestä sen pinnalle, nyt siis sama kuin etäisyys kuution pohjatahkon keskipisteestä sen puolipallon pinnalla olevalle kärjelle (kuution neljänneksen avaruuslävistäjä) $r = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Puolipallon tilavuus on $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(a\sqrt{\frac{3}{2}})^3$ ja kuution tilavuus a^3, joten tilavuuksien suhde on

$$\frac{a^3}{\frac{2}{3}\pi(a\sqrt{\frac{3}{2}})^3} = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}} \approx 0,2599.$$

Siis tilavuuksien suhde on prosentteina n. 26.

6. (YO-tehtävä, K2013) Kuution särmän pituus on 2. Sen sisällä on pallo, joka sivuaa jokaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa (Piirrä kuva!). Laske pienemmän pallon säteen tarkka arvo.

Ratkaisu. Tutkitaan kuution kulmasta kulmaan tehtyä pystysuoraa poikkileikkausta, joka osuu kummankin pallon keskipisteeseen. Ison pallon säde on 1 ja pienen r.



Kolmiot AQS ja ABC ovat yhdenmuotoiset (eivät yhtenevät!). Kuution avaruuslävistäjän AC pituus on $2\sqrt{3}$. Koska piste P, isomman pallon keskipiste, on janan AC keskipiste, on janan AP pituus $\sqrt{3}$. Janan SP pituus on säteiden summa $1 + r$.

Nyt siis janan AS pituus on $|AP| - |SP| = \sqrt{3} - (1 + r)$.

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|SQ|}{|CB|}$$

eli

$$\frac{\sqrt{3} - 1 - r}{2\sqrt{3}} = \frac{r}{2}.$$

Tästä saadaan

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$$

7.* (YO-tehtävä, S2009) Suoran ympyräpohjaisen katkaistun kartion korkeus on h ja pohjien säteet r_1 ja r_2, $r_1 < r_2$.

a) Määritä pohjien suuntaisen leikkauksen pinta-ala $a(z)$ korkeudella $z \in [0, h]$.

b) Laske $\int_0^h a(z\,dz)$.

c) Miten eo. integraali liittyy katkaistun kartion tilavuuteen?

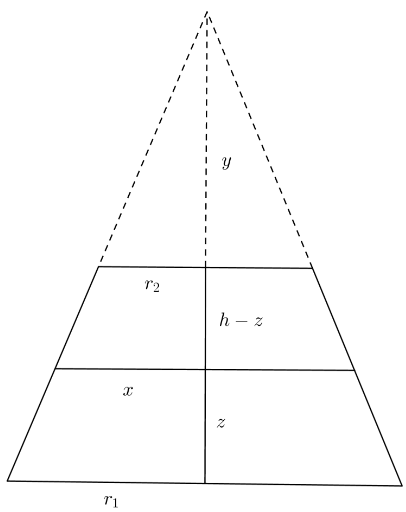
d) Laske yllä esitettyä periaatetta soveltaen r-säteisen pallon tilavuus käyttämällä vaakasuoria tasoleikkauksia.

Ratkaisu.

a) Katkaistun kartion pohjien suuntainen poikkileikkaus on ympyrä. Pinta-alaa varten lasketaan sen säde korkeudella z.

Tarkastellaan katkaistun kartian halkileikkausta, joka on täydennetty kolmioksi (kuvassa katkoviivalla).

Kuva 3: Katkaistun kartion poikkileikkaus



Leikkauksen yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista saadaan

$$\frac{y}{r_2} = \frac{h + y}{r_1},$$

mistä

$$y = \frac{r_2 h}{r_1 - r_2}.$$

Yhdenmuotoisuudesta saadaan myös

$$\frac{x}{r_2} = \frac{y+h-z}{y}.$$

Sijoitetaan tähän $y = \frac{r_2 h}{r_1 - r_2}$, niin saadaan

$$x = r_2\Big(1 + (r_1 - r_2)\frac{h-z}{r_2 h}\Big) = r_1 - (r_1 - r_2)\frac{z}{h}.$$

Ympyrän pinta-alasta πr^2 saadaan nyt kysytty pinta-ala, siis

$$a(z) = \pi x^2 = \pi\Big(r_1 - (r_1 - r_2)\frac{z}{h}\Big)^2.$$

b) Nyt

$$\begin{aligned}\int_0^h a(z)dz &= \pi \int_0^h \Big(r_1^2 - 2r_1(r_1 - r_2)\frac{z}{h} + (r_1 - r_2)^2\ \frac{z^2}{h^2}\Big)dz \\ &= \Big|_0^h \Big(r_1^2 z - r_1(r_1 - r_2)\frac{z^2}{h} + \frac{1}{3}(r_1 - r_2)^2\ \frac{z^3}{h^2}\Big) \\ &= \pi h\Big(r_1^2 - r_1(r_1 - r_2) + \frac{1}{3}(r_1 - r_2)^2\Big) \\ &= \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).\end{aligned}$$

c) Katkaistun kartion tilavuus on

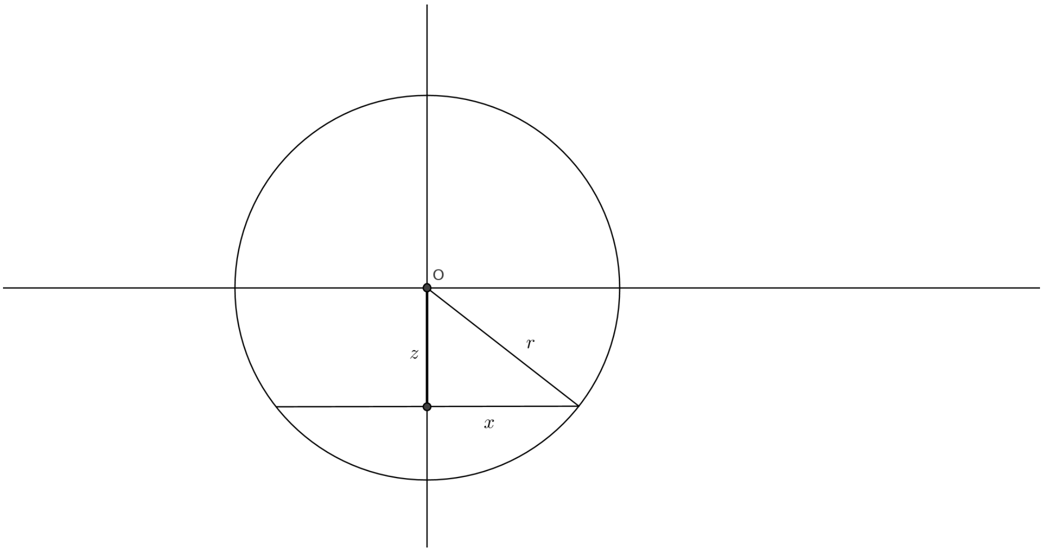
$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Toisin sanoen, kohdassa b) laskettiin katkaistun kartion tilavuutta.

d) Äsken määrättiin katkaistun kartion leikkauksen pinta-ala ja sitten integroitiin tasoleikkausten yli. Tehdään nyt samoin r-säteisen pallon suhteen. Oletetaan pallon keskipiste origoon ja tarkastellaan x, y-tason suuntaisia leikkauksia korkeudella z, kun $-r < z < r$. Leikkaukset ovat taas ympyröitä, määritetään niiden säde.

z-akselin suuntaisesta poikkileikkauksesta nähdään, että $x^2 + z^2 = r^2$, mistä $x = \sqrt{r^2 - z^2}$. Leikkausympyrän ala on siis

$$a(z) = \pi x^2 = \pi(r^2 - z^2).$$



Lasketaan nyt integraali yli leikkausympyröiden:

$$\int_{-r}^{r} a(z)dz = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)dz$$
$$= \pi \Big|_{-r}^{r} (r^2 z - \frac{1}{3} z^3)$$
$$\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Kuten edellä, integraali antaa kappaleen tilavuuden.