MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 2
26.1. alkavalle viikolle

1. (Harjoitus 1.4.1., [L]) Osoita, että jos $AB \cong A'B'$ ja $CD \cong C'D'$, niin $AB + CD \cong A'B' + C'D'$.

2. (Harjoitus 1.4.4., [L]) Todista: jos $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$, niin $\alpha < \gamma$.

3. (Harjoitus 1.4.5., [L]) Todista: jos α ja β ovat kulmia, niin seuraavista vaihtoehdoista yksi ja vain yksi on tosi: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha \cong \beta$.

4. Todista laskuharjoituksissa 1 esiintynyt *kulmanpuolittajalause*: Oletetaan, että kolmion ABC kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä P. Osoita, että $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC}$.

5. i) Miten Vektorit-kurssilla (MAA5) käytettiin vektoreiden pistetuloa hyväksi kulman laskemisessa? Miten se liittyy Geometria-kurssilla (MAA3) esiteltyyn kosinilauseeseen?

   ii) (YO-tehtävä, S2007) Kolmiossa ABC on vektori $\vec{AB} = 2,2\bar{i} + 7,3\bar{j}$ ja $\vec{AC} = 5,9\bar{i} - 2,1\bar{j}$.

      a) Määritä kolmanteen sivuun liittyvä vektori $\vec{BC}$.
      b) Osoita, että BC on kolmion pisin sivu.
      c) Määritä kulman BAC suuruus pistetulon avulla $0,1$ asteen tarkkuudella.

6. (YO-tehtävä, K2012) Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1. Jatkamalla näin saadaan päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, \ldots$. Laske ympyröiden pinta-alojen summa. (Piirrä ensin kuva!)

7.* Tutut pisteet ja suorat tasossa ovat vain yksi tapa visualisoida Euklidista geometriaa. Tarkastellaan erästä Euklidisen geometrian mallia, kutsuttakoon sitä malliksi $\mathbb{F}$. Olkoon ω jokin ympyrä tasossa. Määritellään $\mathbb{F}$-mallissa ”tasoksi” ympyrän ω rajaama avoin kiekko. ”Suorina” taas ovat kaikki ne puoliellipsit, joiden isona säteenä on jokin ympyrän ω halkaisija, mukaanlukien ympyrän ω kaikki halkaisijat (rajatapauksena, ts. tapaukset, joissa pienempi ellipsin säde on ”nolla”). $\mathbb{F}$-mallissa pisteitä ovat kaikki kiekon pisteet.

a) Piirrä kuva $\mathbb{F}$-mallin tasosta, jossa on muutamia $\mathbb{F}$-mallin suoria.
b) Pohdi mitä tähän mennessä käydyt aksioomat tarkoittavat tässä mallissa.