MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Harjoitus 1
19.1. alkavalle viikolle

Viite [L] (nyt ja jatkossa) viittaa M. Lehtisen *Geometrian perusteita, kevälukukausi 2013*-luentomonisteeseen, jota tehtävien numerointi noudattaa. Tähdellä ($*$) merkityt tehtävät ovat ylimääräisiä tehtäviä, joita ei käydä laskareissa läpi, eikä lasketa laskareiden kokonaislukumäärään, mutta niistä toki saa yhden tehdyn tehtävän lisäpisteitä ajatellen.

1. Määritä seuraavissa tapauksissa, onko joukon A relaatio R refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen. Jos relaatio on ekvivalenssirelaatio, määritä sen ekvivalenssiluokat.

   a) Joukko $A = \mathbb{N}$ ja relaatio R on määrätty ehdolla aRb, jos $a + b \leq 88$.

   b) $A = \mathbb{Z}$ ja aRb, jos $ab > 0$.

   c) $A = \{1, 2, 3, 10, 20, 30, 100, 200, 300\}$ ja aRb, jos luvussa a on yhtä monta numeroa, kuin luvussa b.

   Ratkaisu. Tarkistetaan refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus kunkin relaation kohdalla. Relaatio on ekvivalenssirelaatio, jos sillä on kaikki nämä ominaisuudet.

   a) Relaatio R on symmetrinen: jos $a, b \in \mathbb{N}$ ja $a+b \leqslant 88$, on luonnollisten lukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden nojalla myös $b+a = a + b \leqslant 88$. R ei kuitenkaan ole refleksiivinen (esim. $80 + 80 \geqslant 88$) eikä transitiivinen (esim. $80 + 1 \leqslant 88$ ja $1 + 82 \leqslant 88$, mutta $80 + 82 > 88$) joten R ei ole ekvivalenssirelaatio.

   b) Relaatio R on symmetrinen: jos $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $ab > 0$, on kokonaislukujen kertolaskun vaihdannaisuuden nojalla myös $ba = ab > 0$. Relaatio R on myös transitiivinen: jos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ab > 0$ ja $bc > 0$, ovat silloin $a, b, c \neq 0$ ja lisäksi a ja b keskenään samanmerkkisiä sekä b ja c keskenään samanmerkkisiä, joten a ja c ovat keskenään samanmerkkisiä ja $ac > 0$. Relaatio ei kuitenkaan ole refleksiivinen, sillä $0 \cdot 0 = 0$.

   c) Relaatio R on refleksiivinen: luvussa a on väistämättä sama määrä numeroita kuin luvussa a. Relaatio on myös symmetrinen: jos luvussa a on sama määrä numeroita kuin luvussa b, on silloin luvussa b sama määrä numeroita kuin luvussa a. Relaatio on myös transitiivinen: jos luvuissa a ja b on sama määrä numeroita, ja luvussa c on sama määrä numeroita kuin luvussa b, on luvuissa c ja a molemmissa tuo sama määrä numeroita. Joukko osittuu ekvivalenssiluokkiin alkioiden numeroiden määrien mukaan: yksinumeroiset alkiot muodostavat luokan $\{1, 2, 3\}$, kaksinumeroiset luokan $\{10, 20, 30\}$ ja kolminumeroiset luokan $\{100, 200, 300\}$.

2. Käy vielä luennolla läpikäydyn Lauseen 1.2.1. (s. 5, [L]) todistus läpi ja näytä, miksi suora GE ei kulje kolmion ACF minkään kärjen kautta.

   Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: Oletetaan, että suora GE kulkee pisteen C kautta. Aksiooman 1 nojalla kahden pisteen kautta kulkeva suora on yksikäsitteinen, joten $GE = CE = CG$. Lisäksi G valittiin suoralta FC, joten $FC = CG$ (aksiooma 1). Siis $FC = GC = CE$ ja siten $FC = FE$ (aksiooma 1). Piste F valittiin suoralta AE, joten $FE = AE$ (aksiooma 1). Siis $FC = FE = AE$. Saadaan $C \in AE$ (aksiooma 1) ja siitä $E \in AC$ (taas aksiooma 1), mutta piste E löydettiin suoran AC ulkopuolelta. RR, joten suora GE ei kulje pisteen C kautta.

   Osoitetaan esimerkin vuoksi kärkien A ja F tapaukset vuorostaan suoralla todistuksella. Piste F löydettiin suoralta AE, joten $AE = AF$ (aksiooma 1). Piste E löydettiin suoran AC ulkopuolelta, joten $AE = AF$ on eri suora kuin AC. Suorat AF ja AC leikkaavat toisensa pisteessa A. Aksioomasta 1 seuraa, että tämä leikkauspiste on yksikäsitteinen, ja koska oletusten mukaan $C \neq A$, seuraa $C \notin AF$. Aksiooman 1 nojalla on silloin $AF \neq FC$. Piste G löydettiin suoralta FC joten $FC = FG$ (aksiooma 1) ja koska C on pisteiden F ja G välissä, $G \neq F$ (aksiooma 3). Piste F on eri suorien AF ja FG yksikäsitteinen (aksiooma 1) leikkauspiste, joten G ei ole suoralla AF. Siis $EG \neq AF$ (aksiooma 1). Suora GE leikkaa suoran AF pisteessä E. Piste E on pisteiden A ja F välissä ja siten aksiooman 3 nojalla $E \neq A$ ja $E \neq F$. Kahden eri suoran leikkauspiste on yksikäsitteinen (seuraa aksioomasta 1), joten suora GE ei siis leikkaa suoraa AF pisteessä A tai F. Suora GE ei siis kulje kolmion kärjen A eikä F kautta.

   □

3. (Harjoitus 1.2.1., [L]) Osoita, että jos suora a leikkaa kolmion ABC sivut AB ja BC, niin se ei leikkaa sivua CA.

   Ratkaisu. Todistetaan väite olettamalla, että suora a leikkaa kolmion ABC kaikki kolme sivua ja johtamalla oletuksesta ristiriita.

Olkoon a suora, joka leikkaa janat $\overline{AB}, \overline{BC}$ ja $\overline{CA}$ kulkematta minkään pisteistä A, B, C kautta.

Nimetään suorien a ja AB leikkauspistettä D, suorien a ja BC leikkauspistettä E ja suorien a ja CA leikkauspistettä F. Pisteet D, E, F ovat samalla suoralla a, joten lauseen [L] 1.2.2 nojalla yksi niistä on kahden muun välissä. Voidaan olettaa että vaikkapa E on pisteiden D ja F välissä.

Pisteet A, D ja F eivät ole samalla suoralla, sillä oletusten mukaan $A \notin a$, $a = DF$ ($D, F \in a$, aksiooma 1) ja D ja F kuuluvat eri suorille AB, AC, joiden yksikäsitteinen (aksioomasta 1) leikkauspiste on juuri A. Siispä pisteet määrittävät kolmion.

Oletusten mukaan $E \in a = DF$ ja $E \in BC$, toisin sanoen suora BC leikkaa kolmiota ADF pisteessä E. Aksiooman 6 (Pasch) nojalla leikkaa silloin BC myös jonkin toisen kolmion ADF sivuista, siis janan $\overline{AD}$ tai $\overline{FA}$. Kuitenkin suorien BC ja AD yksikäsitteinen (aksioomasta 1) leikkauspiste on B ja D on pisteiden B ja A välissä, joten $B \notin \overline{AD}$ (aksiooma 3). Samoin F on pisteiden C ja A välissä, joten $C \notin \overline{FA}$ (aksiooma 3), mutta suorien BC ja FA yksikäsitteinen leikkauspiste on C. RR $\square$

4. (Harjoitus 1.2.2., [L]) Osoita, että janan päätepisteet ovat yksikäsitteiset. (Voit käyttää kaikkia luvun 1.2 lauseita.)

Ratkaisu. Kun $\overline{AB}$ on jana ja $\overline{CD}$ on sama jana, päätepisteiden suhteen on kolme mahdollisuutta:

i) Toinen päätepisteistä on sama, toinen eri. (vaikkapa $A = C$, $B \neq D$)
ii) Kaikki päätepisteet ovat eri pisteitä.
iii) Päätepisteet ovat samat. (vaikkapa $A = C$, $B = D$)

Osoitetaan, että vain tilanne *iii*) on mahdollinen johtamalla kahdesta muusta vaihtoehdosta ristiriita.

Tapaus *i*): Olkoon $\overline{AB}$ jana ja $\overline{AD}$ sama jana, $B \neq D$. Piste D kuuluu janalle $\overline{AD} = \overline{AB}$, joten se on pisteiden A ja B välissä. Samoin piste B kuuluu janalle $\overline{AB} = \overline{AD}$, joten se on pisteiden A ja D välissä. Kuitenkin aksiooman 5 nojalla kolmesta eri pisteestä vain yksi voi olla kahden muun välissä. RR

Tapaus *ii*): Olkoon $\overline{AB}$ jana ja $\overline{CD}$ sama jana, A, B, C, D eri pisteitä. Sovelletaan tilanteeseen lausetta [L] 1.2.3. (Sen mukaan pisteet

A, B, C, D ovat suoralla AB -jossakin- järjestyksessä.) Piste $B \in \overline{AB} = \overline{CD}$, joten B on pisteiden C ja D välissä. Piste $C \in \overline{CD} = \overline{AB}$, joten C on pisteiden A ja B välissä. Siten lauseen 1.2.3. nimeämisessä A ja D saavat nimet "A"ja "D"(tai "D"ja "A"). (Ne ovat "reunimmaisina".) Lauseen 1.2.3. nojalla on silloin C janalla $\overline{AD}$ eli C on pisteiden A ja D välissä. Toisaalta pätee myös $A \in \overline{AB} = \overline{CD}$, joten A on pisteiden C ja D välissä. Kuitenkin aksiooman 5 nojalla vain yksi kolmesta eri pisteestä A, C, D voi olla kahden muun välissä. RR

Vain tapaus *iii*) on siis mahdollinen. □

5. a) Etsi käsiisi jokin lukion pitkän matematiikan kurssin Geometria (MAA3) oppikirja. Mitä siellä kerrotaan kulman puolittajista? (Entä muista vastaavista käsitteistä? Mitä annetaan faktana? Todistetaanko jotain?)

   b) (YO-tehtävä, S2013) Kolmion ABC kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä D. pisteiden välisille etäisyyksille on voimassa $CD = 6$, $AD = 4$ ja $DB = 3$. Määritä kolmion sivujen AC ja BC pituuksien tarkat arvot.

Ratkaisu.

   b) Kulmanpuolittajalauseen nojalla kulmanpuolittajasuora jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen pituuksien suhteessa, tässä tapauksessa siis $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$, mistä saadaan $3\overline{AC} = 4\overline{BC}$. Voidaan siis merkitä $\overline{BC} = 3x$ ja $\overline{AC} = 4x$.

   Kun lisäksi kulmaa $ACD = DCB$ merkitään α, saadaan kosinilauseesta kolmioille ACD ja DCB yhtälöt

$$4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6 \cos \alpha$$

   ja

$$3^2 = (3x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 3x \cdot 6 \cos \alpha.$$

   Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan $x^2 = 4$, mistä valitsemalla positiivinen ratkaisu seuraa $\overline{AC} = 8$ ja $\overline{BC} = 6$.

6. a) Miten lineaarialgebran kurssilla määriteltiin vektorien kohtisuoruus ja projektio? (Ks. esimerkiksi viime syksyn Lineaarialgebran I:n kurssisivulta löytyvästä materiaalista *Johdatus lineaarialgebraan, Osa I*, s. 91-). Miten projektiota voisi havainnollistaa?

b) (YO-tehtävä, K2012) Määritä kaikki vektorit $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, joiden pituus on $\sqrt{22}$ ja joiden kohtisuora projektio xy-tasolle on vektori $2\bar{i} + 3\bar{j}$.

Ratkaisu.

b) Vektorin $\bar{a} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ kohtisuora projektio xy-tasolle on $x\bar{i}+y\bar{j}$. Vektorin $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pituus on $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Tulee siis löytää sellaiset vektorit $2\bar{i}+3\bar{j}+z\bar{k}$, joille $\sqrt{2^2 + 3^2 + z^2} = \sqrt{22}$, mistä saadaan $z^2 = 9$. Etsityt vektorit ovat siis $2\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $2\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}$.

7.* (YO-tehtävä, K00) Kuution jokaiselle sivutahkolle asetetaan samanlainen säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Näiden yhteinen korkeus määräytyköön siten, että kahden vierekkäisen pyramidin huiput ja vastaavien tahkojen leikkaussärmä sijaitsevat samassa tasossa. Tällöin syntyy monitahokas, jota kutsutaan *rombidodekaedri*ksi. Sen sivutahkot ovat suunnikkaita, jotka muodostuvat kahdesta vierekkäisten pyramidien sivutahkosta. **a)** Laske pyramidin korkeuden ja kuution särmän pituuden suhde. **b)** Laske rombidodekaedrin sivutahkon kulmat asteen tarkkuudella. **c)** Laske rombidodekaedrin ja kuution tilavuuksien suhde.

i. Avaruusgeometrian tehtävät ovat monille vaikeita hahmottaa. Minkälaisia piiroksia voit piirtää yo. tehtävästä? Keksitkö muita havainnollistuksia?

ii. Laske tehtävä!

Ratkaisu.

i. Ks. esim. kuva alempana.

ii. Symmetrian vuoksi rombidodekaedrin sivutahko muodostaa kuution sivutahkojen kanssa yhtä suuret kulmat, joten pyramidin sivutahkot muodostavat pohjan kanssa 45° kulman. Merkitään kuution särmän pituussa a ja pyramidin pohjan keskipistettä G.

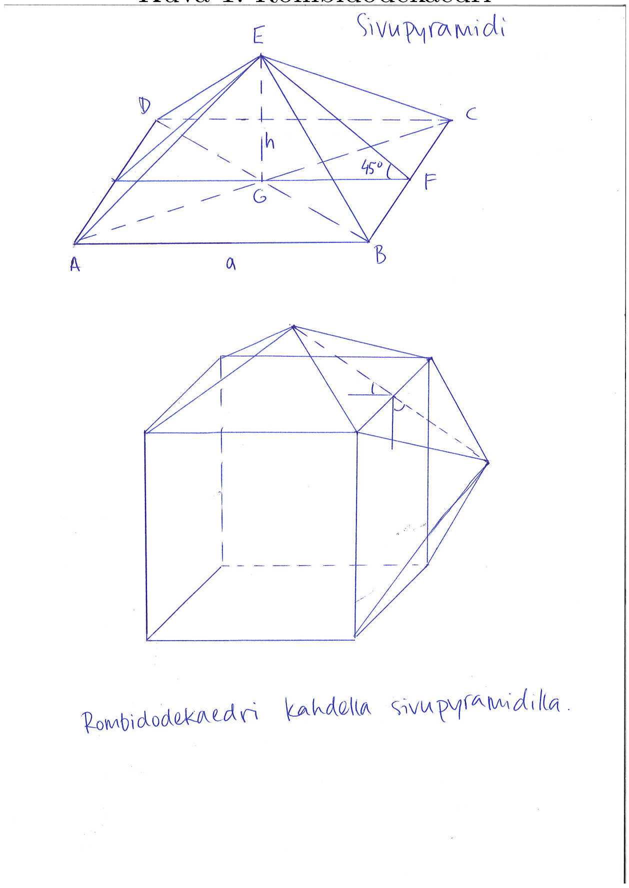
a) Pyramidin korkeus $h = GE = GF = \frac{1}{2}a$, joten $h : a = 1 : 2$.

b) Merkitään pyramidin sivutahkon BCE kantakulmaa α. Tasasivuisesta kolmiosta EFG saadaan $EF = \sqrt{2}h$, joten

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}h}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{2}h}{h} = \sqrt{2}.$$

Siis $\alpha = 54,7356\ldots^\circ$.

Kuva 1: Rombidodekaedri



Rombidodekaedrin sivutahkon kulmien suuruudet ovat $2\alpha \approx 109°$ ja $180° - 2\alpha \approx 71°$. Sivutahkot ovat suunnikkaita, joten vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

c) Yhden sivupyramidin tilavuus on

$$\frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}a^2\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Rombidodekaedrin tilavuus on a^3, joten tilavuuksien suhde on $2 : 1$.