MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
1. kurssikoe (varsinainen koe ma 2.3.)
Ratkaisuehdotuksia

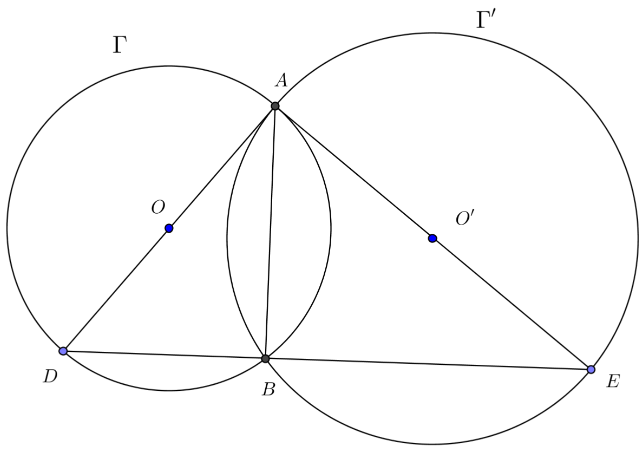
Huomioita pisteytyksestä on merkitty *:llä ratkaisujen loppuun. Suluissa olevat pisteet ratkaisuissa kertovat edeltävän vaiheen arvon pisteinä. Mikäli teit korvaavan kokeen (pe 27.2. tai ma 9.3.) ja haluat tietää pisteytyksestä tai nähdä malliratkaisut, niin kysy niitä erikseen luennoitsijalta!

1. a. Missä muodossa paralleeliaksiooma Lehtisen materiaalissa esitetään? (2 p.)
   b. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Piirretään ympyröille halkaisijat $\overline{AD}$ ja $\overline{AE}$. Osoita, että B, D ja E ovat samalla suoralla. (4 p.)

Ratkaisu.

a. Paralleeliaksiooma: suoralle a kuulumattoman pisteen kautta kulkee *enintään* yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran a kanssa.
   * *Esim. "täsmälleen/ainakin yksi suora"* $\longrightarrow$ 1 p.
b. Merkitään Γ:lla O-keskistä, $\overline{OA}$-säteistä ympyrää ja Γ':lla O'-keskistä, $\overline{O'A}$-säteistä ympyrää. **(1 p.)** Lauseen 1.6.7. nojalla $\angle ABD$ on suora kulma. **(1 p.)** Samoin kulma $\angle ABE$ on suora. **(1 p.)** Koska lisäksi kulmilla $\angle ABD$ ja $\angle ABE$ on yhteinen kylki $\overline{BA}$, niin kulmat ovat joko sama kulma tai toistensa vieruskulmia eli pisteet D, B, E kuuluvat samalle suoralle. **(1 p.)**

Kuva 1: Kuva tehtävään 1.



* *Kuva tai tilanteen kuvailu oikein* $\longrightarrow$ 1 p.
* *Täydet pisteet sai, vaikka ei ollut tarkastellut triviaaleja tapauksia ($B = E$ tai $B = D$ tai $\angle ABD$ ja $\angle ABE$ ovat sama kulma).*

2. a. Osoita, että kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä. (4 p.)

   b. Osoita, että kolmion sisälle voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa kolmion sivuja. (Voit käyttää a.-kohdan tulosta.) (2 p.)

   * *Tämän tehtävän a.-kohta oli tehtävänä harjoituksissa 6 ja b.-kohta kertaustehtävissä.*

   Ratkaisu.

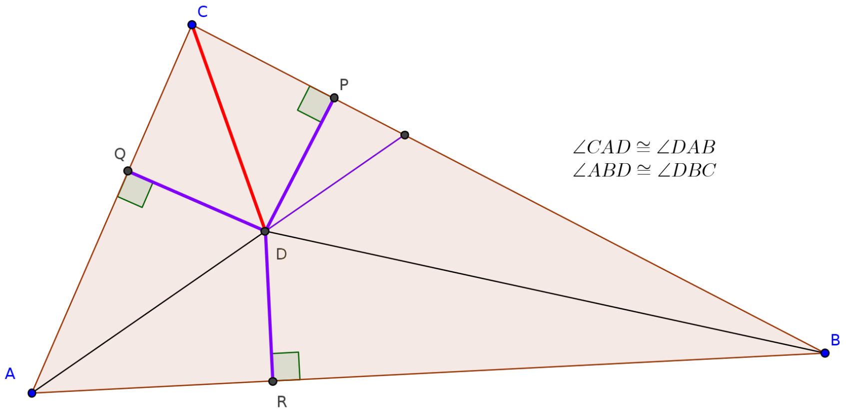
   a. Olkoon ABC kolmio. Piirretään kulmanpuolittajat kulmille $\angle ABC$ ja $\angle ACB$. Kulmanpuolittajat leikkaavat kolmion sisällä pisteessä D. **(1 p.)** Olkoot R, P ja Q pisteen D kohtisuorat projektiot janoille $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$. Kolmiot RBD ja PBD oat yhtenevät (kks), joten $\overline{DR} \cong \overline{DP}$. Kolmiot PCD ja QCD oat yhtenevät (kks), joten $\overline{DP} \cong \overline{DQ}$. Näin ollen $\overline{DR} \cong \overline{DQ}$. **(1 p.)**

   Piirretään jana $\overline{AD}$. Nyt kolmiot ARD ja AQD oat yhtenevät (suorakulmainen ssk), joten $\angle RAD \cong \angle AQD$. **(1 p.)**

   Näin ollen $\overline{AD}$ puolittaa kulman RAQ ja kaikki kulman puolittajat leikkaavat samassa pisteessä D. **(1 p.)**

* *Väärät perustelut (esim. ssk, eikä suorakulmainen ssk)* $\longrightarrow$ -1 p.

Kuva 2: Kuva tehtävään 2.



b. Olkoon I piste, jossa kulmanpuolittajat leikkaavat. Olkoot A', B' ja C' pisteen I projektiot janoille $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$. Nyt, a. -kohdan todistuksen nojalla

$$\overline{IA'} \cong \overline{IB'} \cong \overline{IC'}.$$

Olkoon Γ I-keskinen $\overline{IA'}$-säteinen ympyrä. Koska $\overline{AB} \perp \overline{IA'}$, $\overline{AB} \perp \overline{IA'}$ ja $\overline{CA} \perp \overline{IC'}$, niin kolmion sivut ovat tangentteja ympyrälle Γ, ts. Γ sivuaa kaikkia kolmion sivuja.

* *Ympyrä oikein, perustelut puuttuu* $\longrightarrow$ 1 p.

3. a. Mainitse neljä eri tason käyrää, jotka saadaan kartioleikkauksilla. (2 p.)

b. Kuinka suuri on sellaisen suoran ympyrälieriön pohjan säde ja korkeus, jonka tilavuus ja vaippa ovat yhtäsuuret, kuin r-säteisen pallon tilavuus ja pinta-ala? (4 p.)

Ratkaisu.

a. *Ellipsi* ja sen erikoistapaus *ympyrä*, sekä *hyperbeli* ja *paraabeli.*

* *Täyteen pisteeseen vaadittiin kaksi kartioleikkausta, puolikkaita pisteitä ei ollut jaossa.*
* *Myös suora hyväksyttiin.*

b. *Pallo*: r-säteisen pallon tilavuus ja pinta-ala ovat

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{4}{3}\pi r^3, \\ A_p &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Lieriö: jos pohjan säde on R ja korkeus H, niin lieriön tilavuus ja pinta-ala ovat

$$\begin{aligned} V_l &= \pi R^2 H, \\ A_l &= 2\pi RH. \end{aligned}$$

* *Kaavat oikein pallolle ja lieriölle* $\longrightarrow$ 1 p.

$$\begin{aligned} V_l = V_p &\iff \pi R^2 H = \frac{4}{3}\pi r^3 \iff H = \frac{4r^3}{3R^2}. \\ A_l = A_p &\iff 2\pi RH = 4\pi r^2 \iff H = \frac{2r^2}{R}. \end{aligned}$$

* *Yo. yhtälöt oikein* $\longrightarrow$ 1 p.

Nyt pätee

$$\frac{4r^3}{3R^2} = \frac{2r^2}{R} \iff 4r^3 R = 2r^2 3R^2 \iff R = \frac{2}{3}r \quad (1\text{ p.}).$$

Sijoittamalla R:lle saatu lauseke yllä olevaan lausekkeeseen H:lle, saadaan

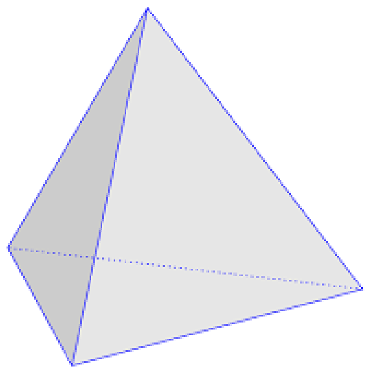
$$H = \frac{2r^2}{R} = \frac{2r^2}{\frac{2}{3}r} = 3r \quad (1\text{ p.}).$$

* *Idea oikein, virhe laskussa* $\longrightarrow -1$ p.

4. *Tetraedri* on säännöllinen monitahokas (yksi Platonin kappaleista!), joka muodostuu neljästä tahosta, jotka kaikki ovat tasasivuisia kolmioita. Johda kaava tetraedrin tilavuudelle, kun tetraedrin särmät (eli tahoina olevien kolmioiden sivut) ovat pituudeltaan s.

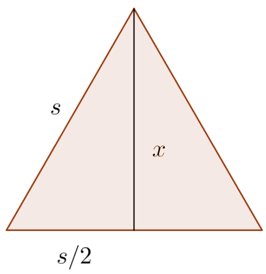
   Ratkaisu.

Kuva 3: Tetraedri



* *Kuva oikein* $\longrightarrow$ 1 p.

Kuva 4: Tetraedrin pohja



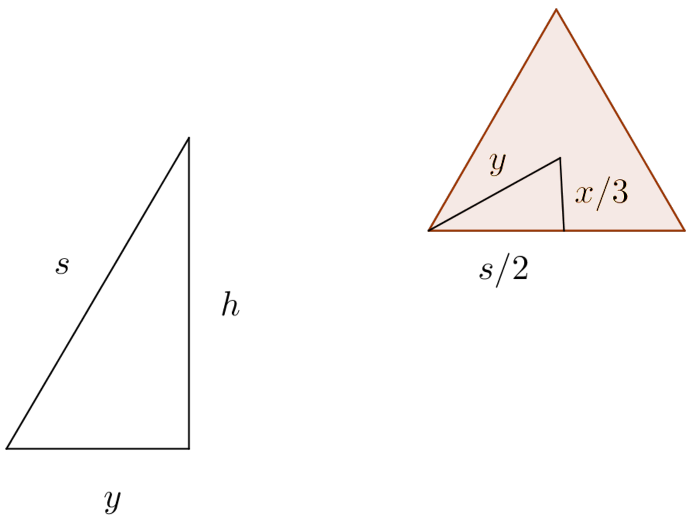
Nyt

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = s^2 \iff x^2 = \frac{3}{4}s^2 \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}s \quad \textbf{(1 p.)}.$$

Näin ollen tetraedrin pohjan ala (eli tasasivuisen kolmion ala, kun sivu on s) on

$$A_{pohja} = \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}s\frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 \quad \textbf{(1 p.)}.$$

Kuva 5: Tetraedrin korkeuden laskeminen



Lasketaan sitten tetraedrin korkeus h (ks. Kuva 5). Tasasivuisen kolmion keskipiste jakaa sen kautta kulkevat kulmanpuolittajat suhteessa $2:1$ (tieto MAOL:sta tai laskemalla). Nyt, Pythagoraan lauseella

$$y^2 = \left(\frac{1}{2}s\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = \frac{1}{3}s^2. \quad \textbf{(1 p.)}.$$

Edelleen

$$h^2 = s^2 - y^2 = \frac{2}{3}s^2 \Longrightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot s. \quad \textbf{(1 p.)}.$$

Näin ollen tetraedrin tilavuus on

$$V_{tetraedri} = \frac{1}{3}A_{pohja}h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot s = \frac{\sqrt{2}}{12}s^3. \quad \textbf{(1 p.)}.$$