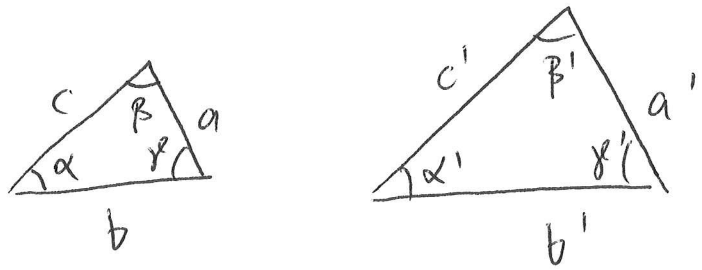
# Kertausta 2. kurssikoetta varten

## I YHDENMUOTOISUUS (2.1.–2.3., [L])

- Janojen laskutoimitukset (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku)
- Kolmioiden yhdenmuotoisuus




$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Yhdenmuotoisuuslauseet:

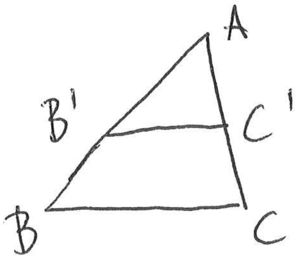
KK (kaksi paria yhteneviä kulmia)

SSS $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$

SKS $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \ \gamma = \gamma'\right)$

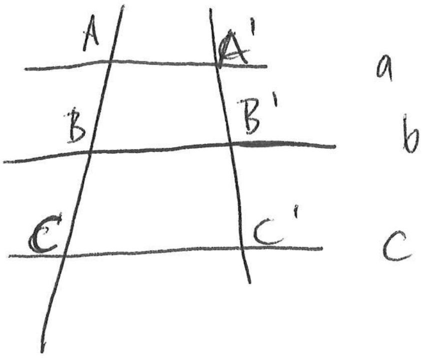
"SSK" (tarkista lisäehdot!)

L 2.2.2




Kolmiot ABC ja AB'C' ovat yhdenmuotoisia, jos ja vain jos BC ∥ B'C'.

L 2.2.4

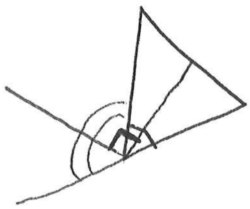



$a \parallel b \parallel c$

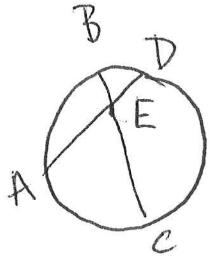
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

- Pythagoraan lause!

- Kolmion kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat kohtisuorassa!



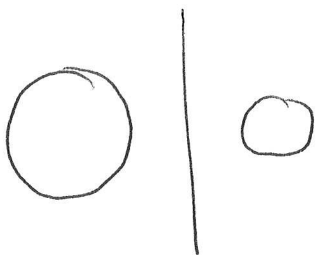
- Pisteen potenssi (ympyrän suhteen)

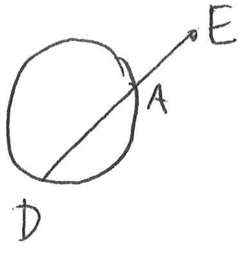



$\overline{AE} \cdot \overline{ED}$

$= \overline{BE} \cdot \overline{EC}$

+ radikaaliakseli






$\overline{AE} \cdot \overline{ED}$

- Cevan lause!

# II Geometriset kuvaukset (4.1.–4.3., [L])

## • Yhtenevyyskuvaukset $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$

Määr. i) $f(a) \subset a'$, missä $a, a'$ tason $\mathcal{T}$ suoria

ii) $\overline{AB} \cong \overline{f(A)f(B)} \quad \forall A, B \in \mathcal{T}$

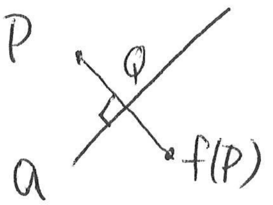
iii) $\measuredangle ABC \cong \measuredangle f(A)f(B)f(C)$

$f$ bijektio, $f^{-1}$ yhtenevyyskuvaus

$\boxed{L\ 4.1.3}$ Jos $\forall$ kolmioilla $ABC$ pätee $f(A)f(B)f(C) \cong ABC$, niin $f$ on yhtenevyyskuvaus.

$\Rightarrow$ KAIKKI YHTEN. KUV. YHDISTELMIÄ NÄISTÄ

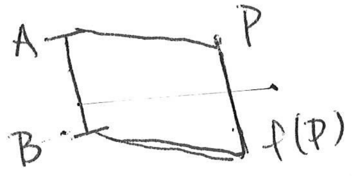
1. Peilaus yli suoran, $f_a$




• $P \in a \Rightarrow f(P) = P$

• $P \notin a \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{Qf(P)}$ ($Q$ $P$:n ja $f(P)$:n välissä)

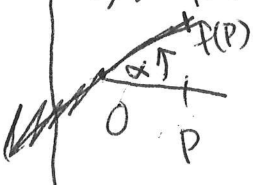
2. Siirto, $f_{AB}$




• $ABf(P)P$ suunnikas

• $P \notin AB \Rightarrow \overline{Pf(P)} \cong \overline{AB}$ ja joko $\overrightarrow{AB}$ on $\overrightarrow{Pf(P)}$:n osa tai $\overrightarrow{Pf(P)}$ on $\overrightarrow{AB}$:n osa

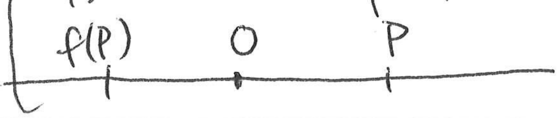
3. Kierto $f_{O,\alpha,+}$ (tai $f_{O,\alpha,-}$)




$f(O) = O$

$P \neq O$: $\overline{OP} = \overline{Of(P)}$, $\measuredangle POf(P) = \alpha$, $\overrightarrow{OP}$ on $\alpha$:n oikea (vasen) kylki.

4. Peilaus pisteessä, $f_O$




$P \neq O$: $f(P) \in \overrightarrow{OP}$:n vastakk. puolisuoralle $\overline{OP} \cong \overline{Of(P)}$

## • Yhdenmuotoisuuskuvaukset

Määr. i) $f(a) \subset a'$, missä $a, a' \subset T$ suoria

ii) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle f(A)f(B)f(C)$

$\boxed{\text{Lu.2.1.}}$ Yhd. muot. kuv.:ssa $f$ jokaisen kolmion $ABC$ kuva $f(A)f(B)f(C)$ on yhd. muot. $ABC$:n kanssa

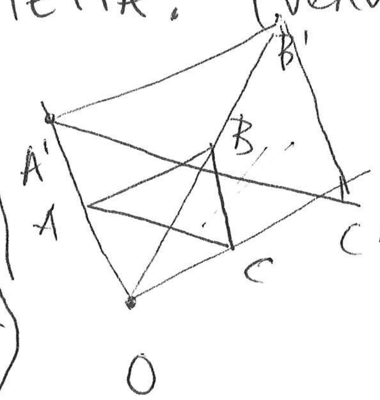
• Yhdenmuotoisuussuhde: $k = \dfrac{\overline{f(A)f(B)}}{\overline{AB}}$

• HOMOTETIA! (venytys, keskeissymm.)

$f_{O,k}$

homotetiakeskus

homotetiakerroin




• $f_{O,k}(O) = O$

• $f_{O,k}(P) \in \overrightarrow{OP}$ s.e.

$$\frac{\overline{Of_{O,k}(P)}}{\overline{OP}} = k$$

Esim. $f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ (vrt. $f(A) = A'$)

on homotetia:

• Homotetiakeskus: $f(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}y_0\right) = (x_0, y_0)$

$\Leftrightarrow$ $x_0 = \frac{1}{2}x_0$ ja $y_0 = \frac{1}{2}y_0$ $\Leftrightarrow$ $(x_0, y_0) = (0,0) = O$

• Pisteille $X = (x,y)$ ja $X_1 = f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$

pätee: $\dfrac{\overline{OX_1}}{\overline{OX}} = \dfrac{\sqrt{(\frac{1}{2}x)^2+(\frac{1}{2}y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ homotetiakerroin $= \frac{1}{2}$.

Pisteiden $O$ ja $X$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on sama kuin $X$:n ja $X_1$:n kautta kulkevan suoran kulmakerroin

$\Rightarrow$ $O, X, X_1$ samalle suoralle.

Lisäksi $O$ ei ole pisteiden $X, X_1$ välissä, joten $X_1 \in \overrightarrow{OX}$.

---

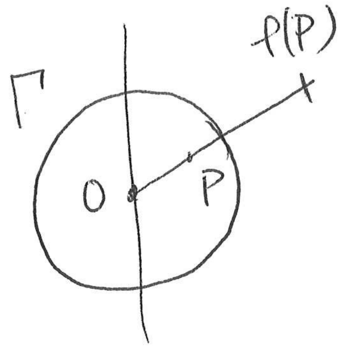
(ks. sivu 8: Tasogeometriaa koordinaatistossa)

- Kaikki yhd.muot. kuvaukset yhdisteitä homotetiasta + yhten. kuvauksista?

## Inversio (= ympyräpeilaus) $f_\Gamma$

- ei yhd.muot. kuv., mutta (anti)konforminen eli kulmat säilyy (suunnistus vaihtuu).

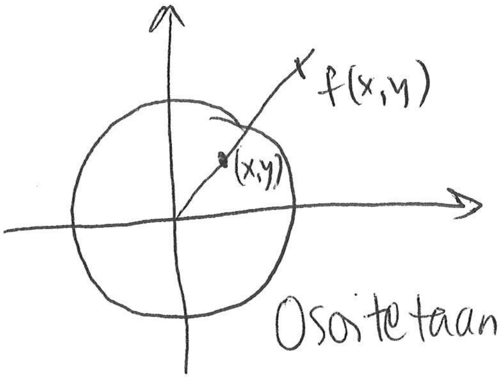
Määr.




$f_\Gamma : T \setminus O \to T \setminus O$, $\Gamma$ O-keskinen, r-säteinen

$P \neq O$: $f(P) \in \overrightarrow{OP}$ s.e.

$$\overline{OP} \cdot \overline{Of(P)} = r^2$$




Esim.

$\Gamma$ yksikköympyrä (kp $(0,0)$, säde 1)

Osoitetaan, että $(1,1)$ on pisteen $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ kuvapiste.

$$|(x,y)| \cdot |f(x,y)| = 1^2$$

$$(x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow |(x,y)| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Koska $(1,1)$:lle pätee: $|(1,1)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, niin

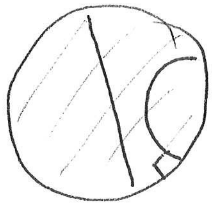
$$\left|\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right| \cdot |(1,1)| = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot 2} = \sqrt{1} = 1 \; (= r^2)$$

Lisäksi $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ja $(1,1)$ samalla $(0,0)$:sta lähtevällä puolisuoralla.

- Epäeukl. geom.

  Saccherin nelikulmio!

- Poincarén malli



P-taso

P-suorat

- Antiikin ongelmat!

# Tasogeometriaa koordinaatistossa

Olk. $T = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

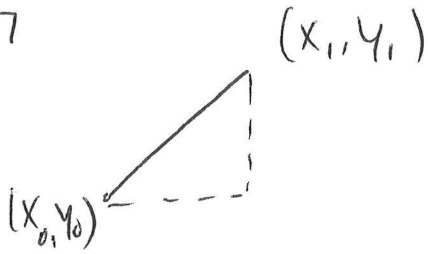
- Suoran yhtälö $\quad y - y_0 = \underset{\uparrow}{k}(x - x_0)$

  kulmakerroin

  - suora kulkee $(x_0, y_0)$:n kautta

- Pisteiden $(x_0, y_0)$ ja $(x_1, y_1)$ välinen etäisyys

  $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$




- Ympyrän yhtälö (kp $(x_0, y_0)$, säde $r$)

  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$