MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Ratkaisuehdotuksia kertaustehtäviin 8 – 10.

1. Pisteet $A = (1, 4)$ ja $B = (3, 0)$ kuvataan kuvauksella $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Voiko kuvaus f olla homotetia, kun kuvapisteet ovat

   a. $f(A) = (3, 6)$ ja $f(B) = (5, 2)$?
   b. $f(A) = (2, 6)$ ja $f(B) = (6, 0)$?

   (Myönteisessä tapauksessa määritä, mikä voisi olla homotetiakeskus ja homotetiakerroin. Kielteisessä tapauksessa näytä, miksi kuvaus f ei voi olla homotetia.)

   Pohdintaa: Määritelmän mukaan homotetiassa $f_{O,k}$, missä O on homotetiakeskus ja k homotetiakerroin, pätee:

   - $f(O) = O$,
   - $\frac{|Of(P)|}{|OP|} = k$ kaikilla pisteillä $P \neq O$,
   - $f(P)$ kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{OP}$.

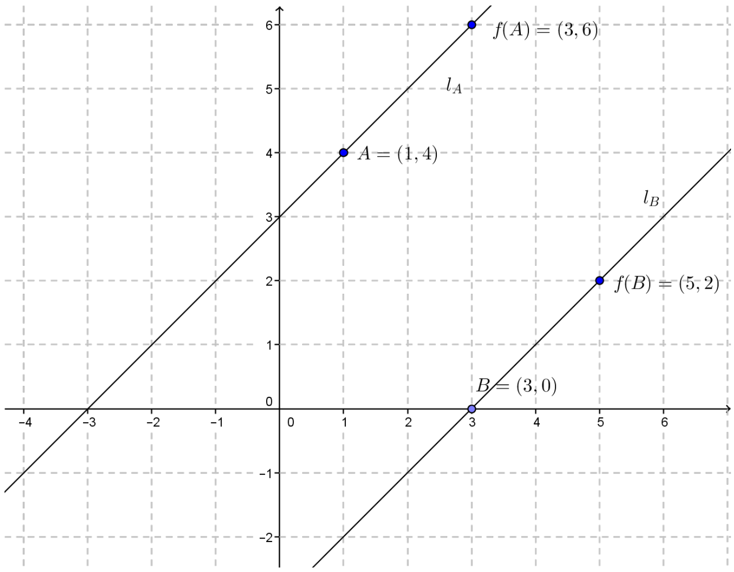
   (Yllä $|XY|$ on janan $\overline{XY}$ pituus eli pisteiden X ja Y välinen etäisyys.) Mikäli kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on homotetia, niin sillä on yksikäsitteinen homotetiakeskus $O = (x_0, y_0)$. Määritelmästä seuraa, että kaikki muotoa $Pf(P)$ $(P \neq O)$ olevat suorat kulkevat pisteen O kautta. Tämä taas tarkoittaa, että mikäli $Pf(P)$ ja $Qf(Q)$ $(P, Q \neq O)$ eivät ole sama suora, niin niillä on yksi ja vain yksi yhteinen piste, nimittäin O.

   Ratkaisu:

   a. Määritetään suorat $Af(A) =: l_A$ ja $Bf(B) =: l_B$. Suora l_A kulkee pisteen $A = (1, 4)$ kautta ja sen kulmakerroin (saadaan laskettua tuttuun tapaan pisteiden A ja $f(A)$ koordinaattimuutosten avulla) on $kk_A = \frac{6-4}{3-1} = 1$. Suora l_B kulkee pisteen $B = (3, 0)$ kautta ja sen kulmakerroin (pisteiden B ja $f(B)$ koordinaattimuutosten avulla) on $kk_B = \frac{2-0}{5-3} = 1$. Koska suorien l_A ja l_B kulmakertoimet ovat samat, niin ne ovat joko sama suora tai ne ovat yhdensuuntaiset suorat. Suoran l_A yhtälö on

   $$y - 4 = kk_A(x - 1) \Longleftrightarrow y = x + 3,$$

josta nähdään, että piste $B = (3,0)$ ei toteuta suoran l_A yhtälöä eli ei kuulu suoralle l_A. Siis suorat l_A ja l_B ovat yhdensuuntaiset (olematta sama suora), joten niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Näin ollen kuvaus *ei voi olla homotetia*, koska potentiaalista homotetiakeskusta ei löydy.



b. Määritetään a. -kohdan tapaan ensin suorat $Af(A) =: l_A$ ja $Bf(B) =: l_B$. Nyt kulmakertoimet ovat $kk_A = \frac{6-4}{2-1} = 2$ ja $kk_B = \frac{0-0}{6-3} = 0$. Kulmakertoimet ovat erit, joten suorat leikkaavat (yhdessä pisteessä). Määritetään suorien yhtälöt ja etsitään niiden leikkauspiste. Suoran l_A yhtälö on

$$y - 4 = kk_A(x-1) \iff y = 2(x-1) + 4 \iff y = 2x + 2$$

ja suoran l_B yhtälö taas

$$y - 0 = kk_B(x-3) \iff y = 0.$$

Suorien l_A ja l_B leikkauspiste toteuttaa molempien suorien yhtälöt, joten sijoittamalla $y = 0$ suoran l_A yhtälöön saadaan $0 = 2x + 2 \iff x = -1$. Näin ollen suorien l_A ja l_B leikkauspisteen koordinaatit ovat $(-1,0)$. Tämä leikkauspiste on ainoa potentiaalinen homotetiakeskus, merkitään $O = (-1,0)$. Tarkistetaan vielä toteutuuko yhtälö

$$\frac{|Of(A)|}{|OA|} = \frac{|Of(B)|}{|OB|},$$

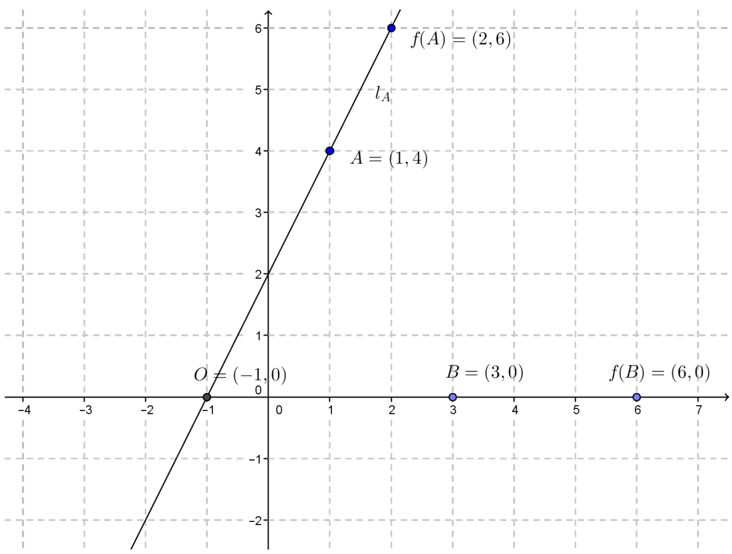
mikä kertoisi, että kuvaus *voisi olla* homotetia, koska nähdään myös, että $f(A) \in \overrightarrow{OA}$ ja $f(B) \in \overrightarrow{OB}$. (Pelkästään kahden piste & kuvapiste -parin perusteella, tietämättä kuvauksen tarkkaa määrittelyä, ei tokikaan voida varmasti sanoa, että kuvaus olisi homotetia.)
Nyt

$$\frac{|Of(A)|}{|OA|} = \frac{\sqrt{(2-(-1))^2+(6-0)^2}}{\sqrt{(1-(-1))^2+(4-0)^2}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

ja

$$\frac{|Of(B)|}{|OB|} = \frac{\sqrt{(6-(-1))^2+(0-0)^2}}{\sqrt{(3-(-1))^2+(0-0)^2}} = \frac{7}{4}.$$

Koska $\frac{|Of(A)|}{|OA|} \neq \frac{|Of(B)|}{|OB|}$, niin tämäkään kuvaus ei voi olla homotetia.



2. Tarkastellaan inversiota yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen. Onko

   a. piste $(1/2, 1/2)$ pisteen $(2,2)$ kuva inversiossa?
   b. piste $(0, 1/3)$ pisteen $(3,0)$ kuva inversiossa?

   Pohdintaa: Määritelmän mukaan inversiossa f_Γ (keskipiste O, säde r) kaikille pisteille $P \neq O$ pätee

   - $f(P)$ kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{OP}$,

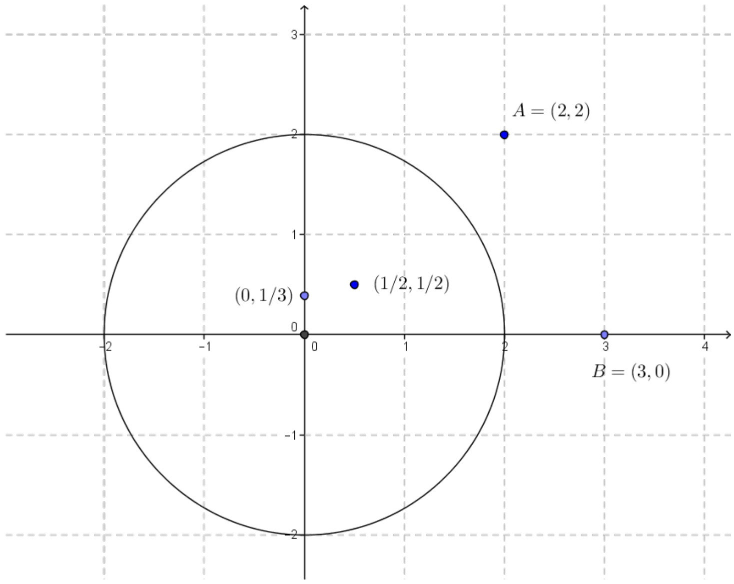
- $|Of(P)| \cdot |OP| = r^2$.

Tässä kyseessä on siis inversio yksikköympyrän, jonka keskipiste $O = (0,0)$ ja säde $r = 1$, suhteen.

Ratkaisu:

a. Merkitään $A = (2,2)$ ja $A' = (1/2, 1/2)$. Nyt
$$|OA| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$
ja
$$|OA'| = \sqrt{(1/2-0)^2 + (1/2-0)^2} = \sqrt{2/4} = 1/\sqrt{2}.$$
Koska
$$|OA'| \cdot |OA| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \neq 1 (= r^2),$$
niin piste $(1/2, 1/2)$ ei voi olla pisteen $(2,2)$ kuvapiste inversiossa yksikköympyrän suhteen.

b. Merkitään $B = (3,0)$ ja $B' = (0, 1/3)$ ja lasketaan janojen OB ja OB' pituudet. Nyt
$$|OB| = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3$$
ja
$$|OB'| = \sqrt{(0-0)^2 + (1/3-0)^2} = 1/3.$$
Siis pätee
$$|OB'| \cdot |OB| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 (= r^2).$$
Jotta B' olisi pisteen B kuva inversiossa, niin lisäksi pitäisi päteä, että $B' \in \overrightarrow{OB}$. Tämä ei kuitenkaan ole totta, sillä B' ei kuulu edes suoralle OB: Suoran OB kulmakerroin on $kk_B = \frac{0-0}{0-3} = 0$, joten suoran OB yhtälö on $y = 0$, mitä piste $B' = (0, 1/3)$ ei kuitenkaan toteuta.



3. a. Olkoon $A = (0,1)$ ja $B = (1,0)$. Hahmottele piirros janan $\overline{AB}$ kuvajoukosta inversiossa ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen.

   b. Määritä joukon $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = -x + 1 \text{ ja } 0 \leq x \leq 1\}$ (eli janan $\overline{AB}$) kuvajoukko inversiossa ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen.

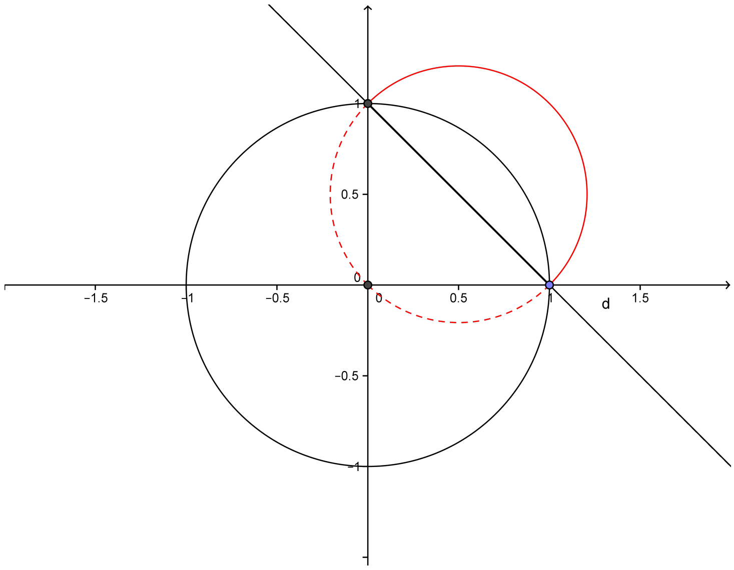
Ratkaisu: Koska jana AB on sellaisen suoran osa, joka ei kulje yksikköympyrän keskipisteen $(0,0)$ kautta, niin jana AB kuvautuu (yksikköympyrän ulkopuoliseksi) osaksi sellaista ympyrää, joka kulkee yksikköympyrän keskipisteen kautta. Janan AB kuvajoukko on yksikköympyrän ulkopuolella ja $f(A) = A$, $f(B) = B$. Ao. kuvassa janan AB kuvajoukko on piirretty punaisella ja janaan AB kuulumattomien, suoran AB pisteiden kuvapisteet inversiossa punaisella katkoviivalla.

Pisteen $(1/2, 1/2) \in \overline{AB}$ kuvapiste inversiossa yksikköympyrän suhteen on $(1,1)$. Janan AB kuvajoukko on siis sellaisen ympyrän osa, joka kulkee pisteiden A, B, $(1,1)$ sekä origon kautta (jo kolme pistettä riittää määrittämään ympyrän yksikäsitteisesti!). Tällaisen ympyrän keskipiste on $(1/2, 1/2)$ ja säde $1/\sqrt{2}$, joten ympyrän yhtälö on

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = (1/\sqrt{2})^2 = 1/2.$$

Janan AB kuvajoukko on ne ko. ympyrän pisteet, jotka ovat suoran AB ”yläpuolella”. Suoran AB yhtälö on $y = -x + 1$, joten kysytty kuvajoukko on

$$\{(x,y) \in R^2 : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2, y \geq -x + 1\}.$$



d