MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Geometria, kevät 2015
Kertaustehtäviä 2. kurssikoetta (ma 4.5. klo 13-15) varten

Kertaamme 2. kurssikokeeseen keskiviikon 29.4. luennolla ja näitä voidaan käsitellä laskuharjoituksissa, mutta erillisiä malliratkaisuja näihin tehtäviin ei tule. Koealueeseen kuuluu IV-periodilla käsitellyt asiat eli yhdenmuotoisuus (luvut 2.1-2.3, [L]), kultainen leikkaus (s. 128, [V]), geometriset kuvaukset (luku 4, [L]) , epäeuklidiset geometriat ja Poincarén malli (luku 8, [L]), Antiikin ongelmat (Hadlock ja luentomuistiinpanot) sekä geometriset kuvaukset koordinaatistossa (tulossa ke 29.4. luennolla).

1. Olkoon Γ O-keskinen, r-säteinen ympyrä ja Γ' O'-keskinen, r'-säteinen ympyrä. Oletetaan, että ympyrät eivät leikkaa (eivätkä sivua) toisiaan. Olkoon a suora, joka leikkaa janan OO' pisteessä P ja sivuaa ympyrää Γ pisteessä A sekä ympyrää Γ' pisteessä A' siten, että pisteet A ja A' ovat eri puolilla suoraa OO'. Osoita, että piste P jakaa janan OO' (sisäpuolisesti) suhteessa $r : r'$.

2. Olkoon Γ O-keskinen ympyrä ja Γ' O'-keskinen ympyrä. Oletetaan, että ympyrät eivät leikkaa (eivätkä sivua) toisiaan. Etsi suoralta OO' sellainen piste, jonka kautta kulkee sellainen suora, joka on sekä ympyrän Γ että ympyrän Γ' tangentti.

3. Kun säännölliseen viisikulmioon piirretään kaikki lävistäjät, niin muodostuu toinen säännöllinen viisikulmio. Osoita, että tämän viisikulmion sivun pituus on yhtä suuri, kuin alkuperäisen viisikulmion sivun pienempi osa, kun sivu on jaettu kultaisessa suhteessa.

4. Olkoon $f_{O,r}$ inversio ympyrän Γ (kp O, säde r) suhteen. Olkoon $f_{O,R}$ inversio ympyrän Γ' (kp O, säde R) suhteen. Osoita, että yhdistetty kuvaus $f_{O,r} \circ f_{O,R}$ on homotetia.

5. Kertaa millaiset tason pistejoukot ovat Poincarén (kiekko)mallin P-suoria. Piirrä muutama kolmio Poincarén mallissa.

6.
   a. Selitä miten voit konstruoida pituuden $\sqrt{3} + 1$, kun yksikköjana on annettu.

   b. Anna esimerkki sellaisesta muotoa $\mathbb{Q}[\sqrt{k}]$ olevasta joukosta, jonka alkio luku $\sqrt{3} + 1$ on.

7. Selitä lyhyesti miten voidaan osoittaa mahdottomaksi konstruoida harpilla ja viivaimella sellaisen kuution särmän pituus, jonka tilavuus on 2.

8. Pisteet $A = (1, 4)$ ja $B = (3, 0)$ kuvataan kuvauksella $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Voiko kuvaus f olla homotetia, kun kuvapisteet ovat

   a. $f(A) = (3, 6)$ ja $f(B) = (5, 2)$?

   b. $f(A) = (2, 6)$ ja $f(B) = (6, 0)$?

   (Myönteisessä tapauksessa määritä, mikä voisi olla homotetiakeskus ja homotetiakerroin. Kielteisessä tapauksessa näytä, miksi kuvaus f ei voi olla homotetia.)

9. Tarkastellaan inversiota yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen. Onko

   a. piste $(1/2, 1/2)$ pisteen $(2, 2)$ kuva inversiossa?

   b. piste $(0, 1/3)$ pisteen $(3, 0)$ kuva inversiossa?

10. a. Olkoon $A = (0, 1)$ ja $B = (1, 0)$. Hahmottele piirros janan $\overline{AB}$ kuvajoukosta inversiossa ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen.

    b. Määritä joukon $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = -x + 1 \text{ ja } 0 \leq x \leq 1\}$ (eli janan $\overline{AB}$) kuvajoukko inversiossa ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen.