Relaatiot

Määritelmä

Sanotaan, että R on joukon A relaatio, jos jokaiselle joukon A alkioparille (a, b) on määritelty, onko alkio a relaatiossa R alkion b kanssa vai ei.

Merkitään aRb, jos a on relaatiossa b:n kanssa. Relaatiolle käytetään usein myös symboleita, kuten $<$, $\sim$, $\subset$,..

Esimerkki

Olkoon joukkona $\mathbb{R}$ ja relaationa järjestysrelaatio $<$.

Esimerkki

Olkoon $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ja R relaatio, joka on määritelty ehdolla

$$aRb, \text{ jos } a + b < 10.$$

Nyt $2R4$, koska $2 + 4 = 6 < 10$, mutta esimerkiksi 4 ei ole relaatiossa 6:n kanssa.

Ekvivalenssirelaatiot

Määritelmä

Olkoon R joukon A relaatio. R on *ekvivalenssirelaatio*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $a, b, c \in A$:

1. aRa (refleksiivisyys).
2. Jos aRb, niin bRa (symmetrisyys).
3. Jos aRb ja bRc, niin aRc (transitiivisuus).

Esimerkki

Onko edellisten esimerkkien relaatiot ekvivalenssirelaatioita?

Esimerkki

Olkoon L tason kaikkien suorien joukko. Määritellään relaatio asettamalla

$$l_1 \sim l_2, \text{ jos suorat } l_1 \text{ ja } l_2 \text{ ovat yhdensuuntaiset.}$$

Onko $\sim$ ekvivalenssirelaatio?

Ekvivalenssiluokat ja ositus

Määritelmä

Olkoon $\sim$ joukon A ekvivalenssirelaatio. Oletetaan, että $a \in A$. Niiden alkioiden joukkoa, jotka ovat ekvivalenssirelaatiossa alkion a kanssa, sanotaan alkion a *ekvivalenssiluokaksi* ja merkitään $[a]_\sim$.

Määritelmä

Olkoon B jokin joukko. Kokoelmaa epätyhjiä B:n osajoukkoja sanotaan B:n *osituksekseksi*, jos jokainen alkio $b \in B$ kuuluu täsmälleen yhteen kokoelman osajoukkoon.

Esimerkki

Joukon A ekvivalenssiluokkien joukko $A/\sim$ muodostaa joukon A osituksen. (Pätee myös toisin päin!)