Mitä osataan konstruoida?

1) Kahden pisteen välinen suora
2) Kahden pisteen välinen jana
3) Ympyrä, jonka kp tiedetään, säde annettu

\+ suorien/ leikk.- pisteiden löytäminen
ympyröiden
ympyrän+suoran

$\Rightarrow$ Kaikki konstruktiot

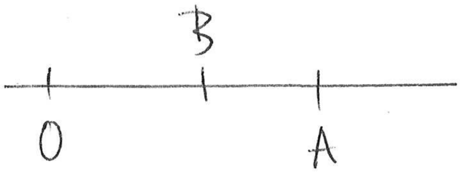
Ol. ykkösjana annettu ja pituudet (janat) a, b.

$a+b$

$\overline{OA}=a$, $\overline{AB}=b$

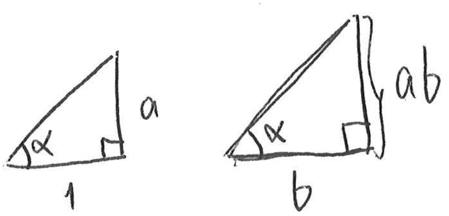
$\overline{OB}=a+b$

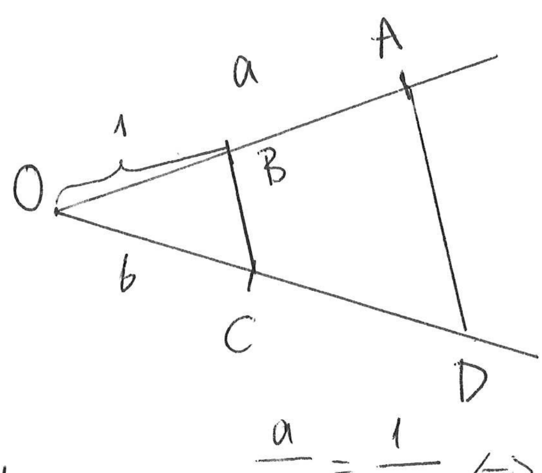
$a-b$ $(a>b)$



$\overline{OB}=a-b$

ab



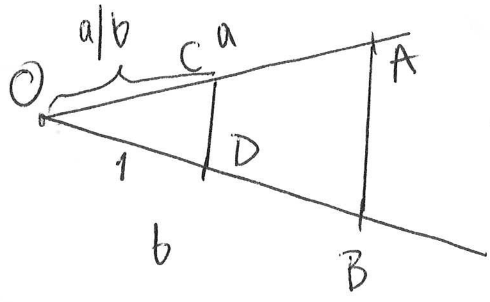


$AD \parallel BC$

$\overline{OD}=ab$

$$\frac{a}{\overline{OD}}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow ab=\overline{OD}$$

a/b



$CD \parallel AB$

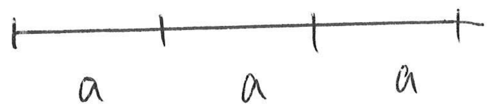
$\overline{OC}=a/b$

$\mathbb{R}$:n osajoukko K muodostaa kunnan, mikäli

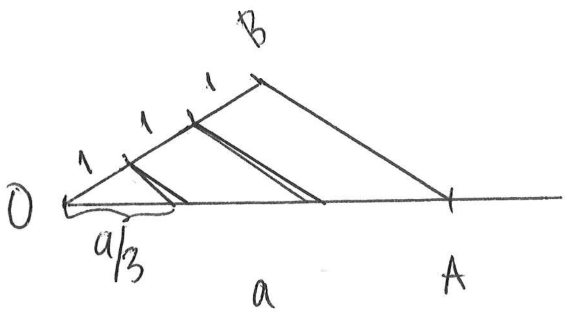
① K on suljettu laskutoimitusten $+, -, \cdot, /$ suhteen

② $1 \in K$

Esim. $\mathbb{Q}$ = rationaaliluvut



$n \cdot a$, $n \in \mathbb{N}$

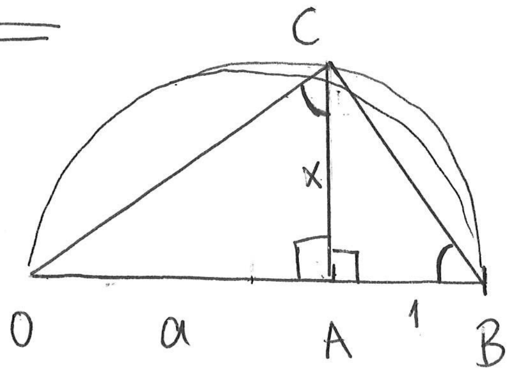


$\frac{a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$r \cdot a = \frac{p}{q} \cdot a$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$

$\sqrt{a}$



$\overline{CA} \perp \overline{OB}$

- $\measuredangle OCA \cong \measuredangle ABC$
  ($\measuredangle OCB$ = suora kulma!)

$\Rightarrow \triangle OAC$ ja $\triangle CAB$ yhdenmuotoisia

$\frac{x}{1} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$.

Kertausta..

Ol. ykkösjana voidaan konstruoida

$\Rightarrow$ kaikki rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ voidaan konstruoida,

$\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{Q}$, voidaan konstruoida.

$\Rightarrow$ Jos a, b, k voidaan konstruoida,

niin $a + b\sqrt{k}$ — " —

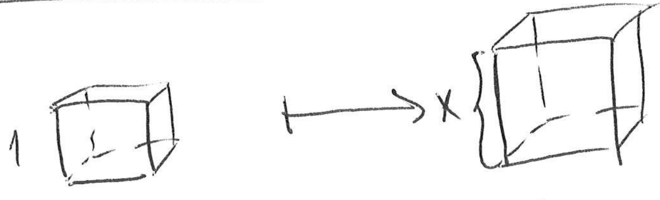
Jos K on kunta ja $a, b, k \in K$ (k vakio), niin muotoa $a + b\sqrt{k}$ olevat luvut muodostavat kunnan $K[\sqrt{k}]$

Esim. $\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$

$$\underbrace{1, 7}_{\in \mathbb{Q}}, \underbrace{\sqrt{7}, \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}, 1 + 2\sqrt{7}}_{\in K_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]}, \underbrace{\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}_{\in K_2 = K_1[\sqrt{1+2\sqrt{7}}]}$$

Lause: Luku a konstruoitavissa, jos ja vain jos $a \in K_n$ s.e. $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$, missä K_j on aina muotoa $K[\sqrt{k}]$ oleva kuntalaajennos K_{j-1}:stä.

1. Kuution kahdennus



$V=1$ $\qquad$ $V = 2 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{2}$.

Väite: $\sqrt[3]{2}$ ei ole rationaaliluku

Tod. Vastaoletus: $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. Tällöin $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. $\operatorname{syt}(p,q)=1$

Nyt $2 = \frac{p^3}{q^3} \iff 2q^3 = p^3 \Rightarrow p = 2a$,

$\cancel{2}q^3 = \cancel{8}^{4} a^3$ $\Rightarrow p, q$ parillisia RR

II tapa: $q^3 + q^3 = p^3$ RR

Fermat'n (suuri) lause: $\nexists\, a,b,c \in \mathbb{N}$ s.e.

$a^n + b^n = c^n$, jos $n > 2$.

III tapa: Tarkastele lukujen $2q^3$ ja p^3 alkulukuhajotelmia.

Siis $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Lemma 1</u>: Olk. $K[\sqrt{k}]$ kunnan K laajennos. Mikäli $\sqrt[3]{2} \in K[\sqrt{k}]$, niin $\sqrt[3]{2} \in K$.

[$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$. Jos $\sqrt[3]{2} \in K_n$, niin lemma 1:stä seuraa, että $\sqrt[3]{2} \in K_{n-1}$. Käyttämällä lemma 1:stä toistuvasti saadaan, että jos $\sqrt[3]{2} \in K_n$, niin $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$.]

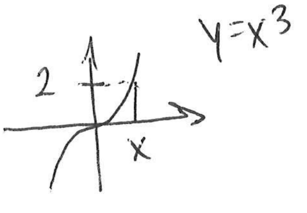
<u>Tod.</u> Ol. $\sqrt[3]{2} \in K[\sqrt{k}]$. Nyt $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{k}$, missä $a, b, k \in K$, $\sqrt{k} \notin K$. Osoitetaan, että $b = 0$.

Nyt
$$2 = (a+b\sqrt{k})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{k} + 3ab^2k + b^3k\sqrt{k}$$
$$= (a^3 + 3ab^2k) + \underbrace{(3a^2b + b^3k)}_{=0}\sqrt{k}$$

$\Rightarrow$ $3a^2b + b^3k = 0$, sillä muutoin
$$\sqrt{k} = \frac{2 - (a^3 + 3ab^2k)}{3a^2b + b^3k} \in K \quad \text{RR}$$

Tällöin
$$2 = (a+b\sqrt{k})^3 = (a - b\sqrt{k})^3$$
$$= (a + 3ab^2k) - \overbrace{(3a^2b + b^3k)}^{=0}\sqrt{k}$$

$\Rightarrow$ $a - b\sqrt{k}$ olisi myös 2:n kuutiojuuri.



Koska $y = x^3$ on aidosti kasvava, niin 2:lla on vaan 1 kuutiojuuri

$\Rightarrow$ $b = 0$. Siis $\sqrt[3]{2} = a \in K$.

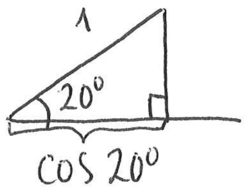
<u>Lause:</u> On mahdonta kahdentaa kuutio.

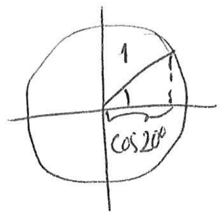
<u>Tod.</u> Käyttämällä lemma 1:stä toistuvasti saadaan $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ RR.

2. Kulman kolmijako

(erikoistapauksissa $90°, 180°$ onnistuu!)

<u>Vastaesimerkillä:</u> Jos $60°$ kulma voidaan jakaa kolmeen, niin $\cos 20°$ pystytään konstruoimaan





Trigonometrian kaavoilla:

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$$
$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Kun $\theta = 20°$, $\cos 3\theta = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{1}{2} \underset{\cos\theta = u}{\Longleftrightarrow} \overbrace{8u^3}^{(2u)^3} - 6u - 1 = 0.$$

$$\underset{2u = x}{\Longleftrightarrow} \boxed{x^3 - 3x - 1 = 0}$$

Lemma 2: Olk. $K[\sqrt{k}]$ kuntalaajennos K:sta.

Jos $x^3-3x-1=0$ on juuri $K[\sqrt{k}]$:ssa, niin sillä on juuri K:ssa.

Tod. Olk. $a+b\sqrt{k}$, $a,b,k \in K$, $\sqrt{k} \notin K$, yhtälön $x^3-3x-1=0$ juuri.

Jos $b=0$, niin $a \in K$ on yhtälön juuri.

Jos $b \neq 0$, osoitetaan että $-2a$ on juuri K:ssa.

Nyt $(a+b\sqrt{k})^3 - 3(a+b\sqrt{k}) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (a^3+3ab^2k-3a-1) + (3a^2b+b^3k-3b)\sqrt{k} = 0$$

Mutta nyt $\boxed{3a^2b+b^3k-3b=0}^{(*)}$ (muutoin $\sqrt{k} \in K$).

$$\Rightarrow a^3+3ab^2k-3a-1=0$$

Jaetaan ~~yht~~ yhtälö (*) puolittain b:llä ($b \neq 0$)

$$\begin{cases} 3a^2+\underbrace{b^2k}-3=0 \\ a^3+3a\underbrace{b^2k}-3a-1=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad b^2k = 3-3a^2$$

sij.

$$a^3+3a(3-3a^2)-3a-1=0$$

$$\Leftrightarrow -8a^3+6a-1=0$$

$$\Leftrightarrow (-2a)^3-3(-2a)-1=0. \quad \square \qquad (x^3-3x-1=0)$$

Lause: ~~Kulman~~ Kulman kolmijako mv. kulmalle on mahdoton

Tod. 60° kulma voidaan jakaa kolmeen
$\Rightarrow$ cos 20° mahdollista konstruoida
$\Rightarrow$ $x^3 - 3x - 1 = 0$ juuri mahdollista konstruoida

Osoitetaan, että $x^3-3x-1=0$:lla ei ole rationaalisia juuria. ~~Katsotaan seuraavaa~~

Olk. $\frac{M}{N}$ yhtälön juuri, $M, N \in \mathbb{Z}$, $N \neq 0$, $syt(M,N)=1$

Nyt $\frac{M^3}{N^3} - \frac{3M}{N} - 1 = 0 \quad | \cdot N^3$

$$\Leftrightarrow M^3 - 3MN^2 - N^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow M^3 = N(3MN + N^2)$$

$$N^3 = M(M^2 - 3N^2)$$

$N = p \cdot a$

$M^3 = p \cdot a (3MN + N^2)$

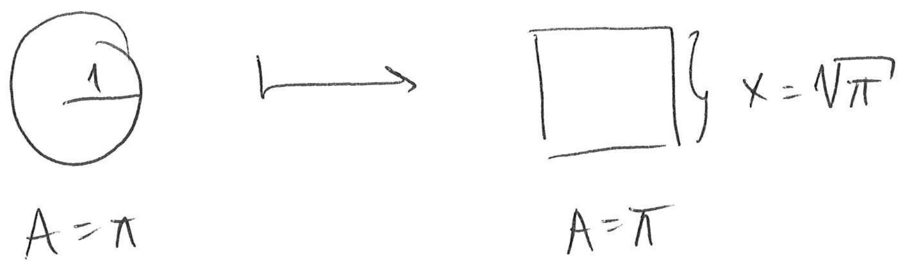
Jos N:llä alkuluku p tekijänä $\Rightarrow$ p jakaa M^3:n ja siten M:n

Jos M:llä alkuluku q tekijänä $\Rightarrow$ q jakaa N^3:n ja siten N:n

$\Rightarrow$ $N, M \in \{-1, 1\}$ $\Rightarrow$ $M=1, N=-1$

eli $M/N = -1$. Mutta -1 ei ratkaise yhtälöä $(-1)^3 - 3\cdot(-1) - 1 = 1 \neq 0$

3. Ympyrän neliöiminen on mahdoton!



- Jos luku a on konstruoitavissa, niin se on algebrallinen luku.
- $\sqrt{\pi}$ ei ole algebrallinen luku.