



# Symmetrioiden tutkiminen GeoGebran avulla

Tutustutaan esimerkkien kautta siihen, miten geometrista symmetriaa voidaan tutkia ja havainnollistaa GeoGebran avulla:

- **peilisymmetria:** *peilaus* pisteen ja suoran suhteen (ja ympyrän suhteen)
- **pyörähdyssymmetria:** *kierrot*
- **siirtosymmetria:** *siirrot*
- **skaalasymmetria:** *venytys, kutistus ja mittakaava*





# Tehtävä I

## Peilatus kuvion ominaisuudet

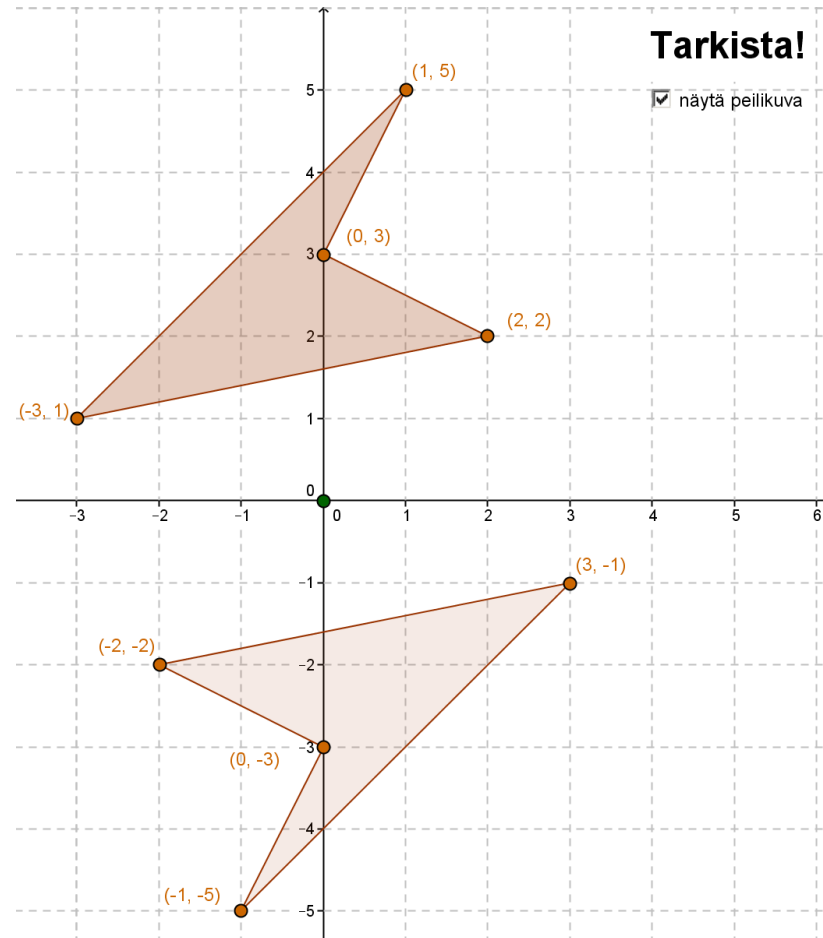
Piirrä koordinaatistoon nelikulmio.  
Ota kärkipisteiden koordinaatit esille.

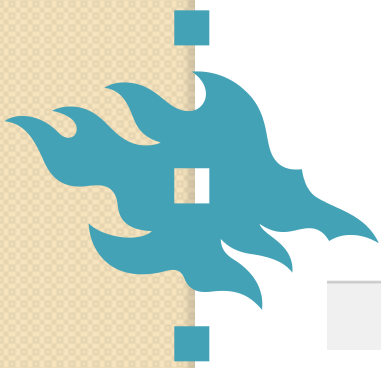
Peilaa kuvio

- ❖ x-akselin suhteen
- ❖ origon suhteen.

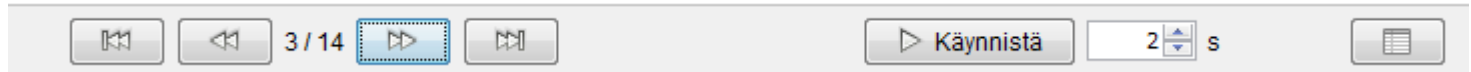
- miten pisteiden koordinaatit muuttuvat, kun piste peilataan x-akselin tai origon suhteen?

Tämä voidaan **luokkatilanteessa** toteuttaa esimerkiksi älytaulun avulla: oppilas tulee piirtämään ratkaisun taululle, ja tarkistus saadaan esille valintaruudun takaa.



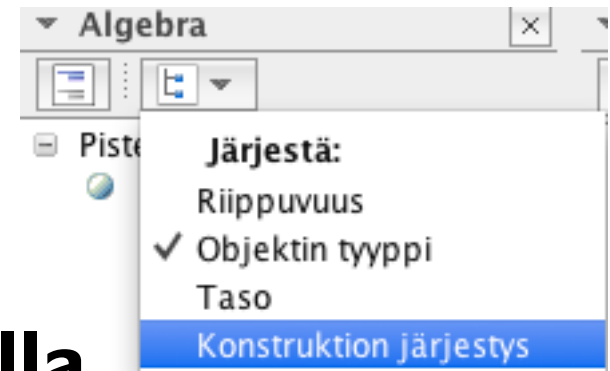


# Vaiheittainen esittäminen



GeoGebrassa voidaan tarkastella piirroksen vaihteita siinä järjestyksessä, kun piirrokset on luotu:

1. **Algebraikkunassa:**
2. Piirroksen vaiheiden **selauspainikkeen avulla**

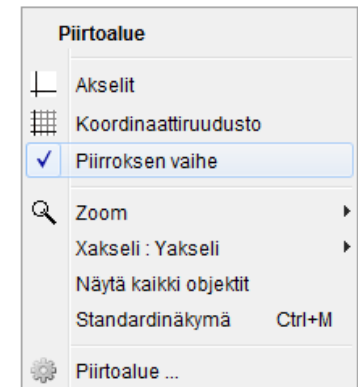
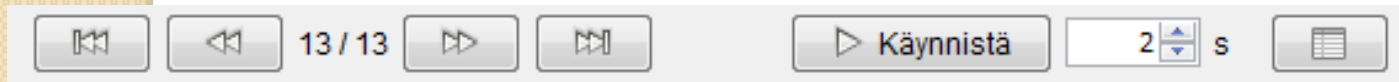


Selauspainikkeiden avulla voidaan tehdä esitys, joka etenee vaiheittain, piirros piirrokselta

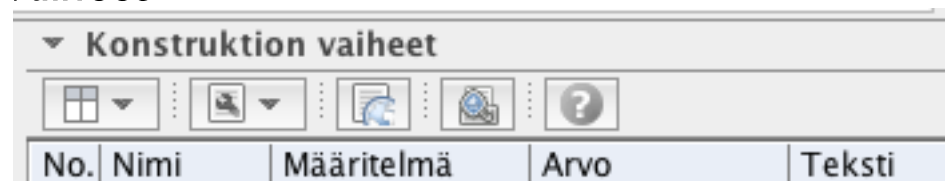
sopii hyvin opettajajohtoiseen esitykseen

# Vaiheittainen esittäminen navigointipainikkeet

- ① Piirtoalueella hiiren oikea - **Piirroksen vaihe Navigointipainikkeet** tulevat esille piirtoalueen alareunaan



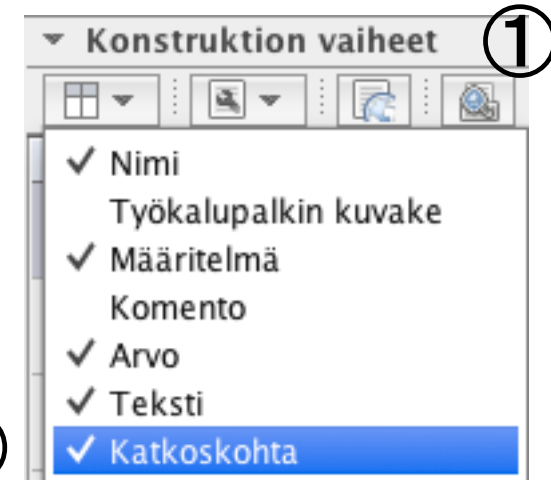
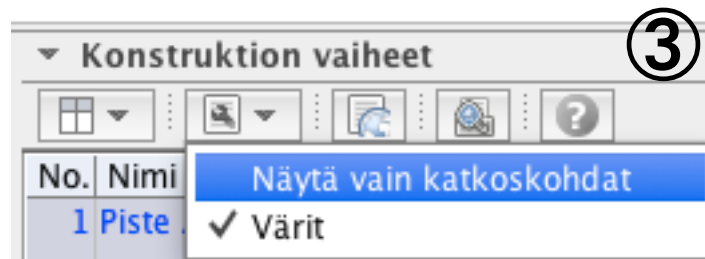
- ② Nappuloiden oikealla puolella reunimmainen painike avaa **konstruktion vaiheet** -ikkunan
  - konstruktion vaiheet saa näkyville myös valitsemalla *Näytä – Konstruktion vaiheet*



# Vaiheittainen esittäminen katkoskohdat

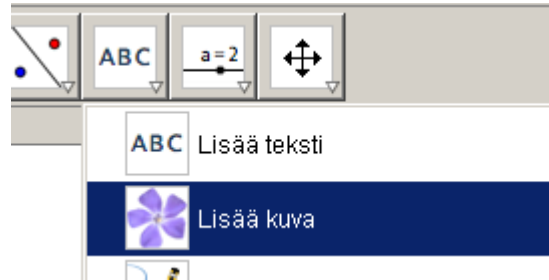
Voit muuttaa konstruktion vaiheiden järjestystä sekä ryhmitellä piirroksen vaiheet sopiviin ryhmiin lisäämällä listaan katkoskohtia :

- ① ota katkoskohdat esille
- ② lisää katkoskohtia sopiviin kohtiin
- ③ näytä lopuksi vain katkoskohdat





# Kuvien kanssa työskentely GeoGebrassa



Paitsi, että GeoGebrassa piirrettyjä kuvia voidaan viedä tekstitiedostoon, myös kuvia voidaan tuoda GeoGebran piirtoalustalle.

➤ tätä varten löytyy työväline *Lisää kuva*

Kuva on samanlainen objekti kuin muutkin piirtoalueella olevat objektit.

Kuvantuontimahdollisuus on hyödyllinen ainakin kun opetetaan ja opiskellaan geometrisia muotoja, symmetrioita, yhdenmuotoisuutta ja mittakaavamuunnoksia (näistä esimerkkejä tehtävissä).



# Tutkimuksia kartalla **Tehtävä 7**

## Pisteen etäisyys suorasta

Tehtävä ”etsi suoralta piste, joka on yhtä kaukana kahdesta annetusta pisteestä” voidaan muotoilla todenmukaiseen viitekehukseen, esimerkiksi:

*Etsi Hki-Lahti moottoritietä kohta,  
joka on yhtä kaukana Orimattilasta ja Hyvinkäältä*

- Tallenna kuva `kartta.jpg` tietokoneen työpöydälle
- avaa GeoGebra, valitse *Näkymät->Geometria*
- Valitse työväline *Lisää kuva* ja napauta piirtoalustaa
- sijoita kuva piirtoalueella sopivaan kohtaan
- luo pisteet Orimattilan ja Hyvinkään kohdalle, piirrä pisteiden yhdysjana ja piirrä janalle keskinormaali
- kohta, joka on yhtä kaukana näistä kahdesta kaupungista, on tunnetusti keskinormaalin ja moottoritien leikkauspiste
- miten tällainen tehtävä toimisi koulussa?



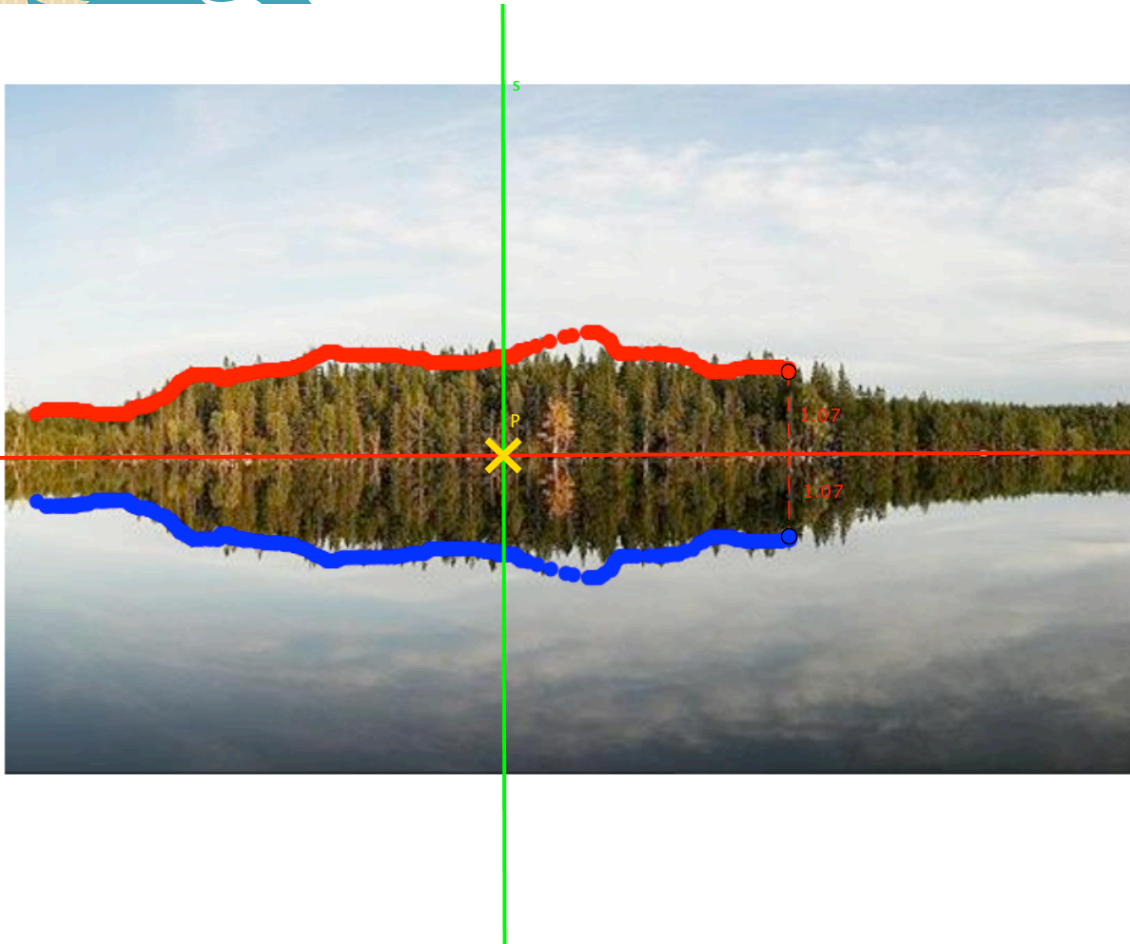
# Peilisymmetrioita **Tehtävä 9**

Missä kulkee symmetria-akseli?  
Mistä löytyy symmetriakeskus?

Tutki kuvasta löytyviä symmetrioita:

- talleta kuva `symmetria.JPG` tietokoneen työpöydälle
- avaa GeoGebra, valitse näkymäksi Geometria
- tuo kuva piirtoalustalle ja tee siitä taustakuva
- lisää kuvaan sen symmetria-akseli
- lisää kuvaan piste ja peilaa se symmetria-akselin suhteen; laita molemmille pisteille jälki käyttöön
- tutki, onko kuvassa pistesymmetriaa
- hyödynnä Peilaus suoran/pisteen suhteen **–työvälineitä sekä Jälki–toimintoa**





## SYMMETRIA SUORAN SUHTEEN

Mitä tarkoittaa, että kuvio tai vaikkapa maisema on symmetrinen suoran suhteen?  
Kokeile liikuttamalla hiirellä pistettä C maiseman mukaan.

Syntyneen jäljen saat pois painamalla ctrl+F.

Tarkista!

Onko kuvassa mielestäsi muita symmetrioita?  
Löytyykö muita symmetriasuoria?  
Löytyykö symmetriakeskuksia (pistesymmetriaa)?

Tarkista!

Kuva on kohtuudella symmetrinen myös vihreän suoran s suhteen.  
Lisäksi se on kohtuudella symmetrinen oranssin pisteen P suhteen.

# Miten GeoGebralla piirretään vektoreita?

## Työvälineet ja syöttökentän komennot

Vektoreiden esittäminen GeoGebrassa on luontevaa:



Vektori pisteestä pisteeseen



Vektori: alkupiste ja vektori

① vektorien piirtämiseen on **kaksi työvälinettä**

② vektoreita voi luoda myös syöttökentän kautta **komennolla**

`Vektori [A]` sekä `Vektori [A, B]` missä A ja B ovat pisteitä, tai yksinkertaisesti kirjoittamalla, esimerkiksi, komennon  $v = (1, 2)$  (huom: pieni kirjain nimessä!)

- se, minkä työvälineen/komennon valitsee, vaikuttaa siihen, kuinka paljon vektorissa on muunneltavuutta
- vektorien laskutoimitukset tehdään syöttökentän kautta:  $u+v$ ,  $-5*u$
- syöttökentän komentoja:
  - a voi komennossa olla vektori, jana tai suora
  - `Yksikkövektori [a]` luo a:n suuntaisen yksikkövektorin;
  - `KohtisuoraYksikkövektori [a]` puolestaan a:ta vastaan kohtisuoran yksikkövektorin
  - `Normaalivektori [a]` luo a:ta vastaan kohtisuoran vektorin, pituus määräytyy tilanteesta
- GeoGebrasta löytyy myös *Siirrä objektia vektorin verran* –työväline

Vektorien kanssa työskenneltäessä, seuraavista komennosta voi olla hyötyä:

`Pituus []`, `Kulma [u, v]`

`Kierto [v, kulma]`

`Siirto [v, alkupiste]`

`Venytys [v, kerroin]`

# Vektorien nimeämisestä

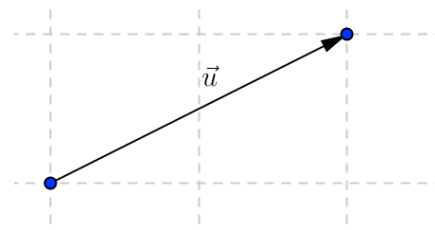
- nimeämiskäytäntö: vektorien nimet ovat pieniä kirjaimia, mutta nimen voi jälkikäteen muuttaa isoksikin kirjaimeksi
- syöttökentän kautta nimen voi valita itse: huomaa kuitenkin ero:  $A = (1, 2)$  ja  $a = (1, 2)$

Vektorimerkki nimeen:

“Teksti”-ruutu ja LaTeX

Ominaisuudet

→ Perusominaisuudet



Nimi:	<input type="text" value="u"/>
Määritelmä:	<input type="text" value="Vektori[A, B]"/>
Teksti:	<input type="text" value="\$\vec{u}\$"/>
<input checked="" type="checkbox"/> Näytä objekti	
<input checked="" type="checkbox"/> Näytä nimi:	<input type="text" value="Teksti"/>
<input type="checkbox"/> Näytä jälki	

# Tehtävä I: Vektorien yhteenlasku

Vektoreita työvälineillä

Ruudukosta voi olla hyötyä!

Samoin magneetti->Pisteen sieppaus->kiinnitetty koordinaatistoon

Avaa GeoGebra-ikkuna, valitse näkymäksi Geometria

➤ lisää piirtoalueelle kaksi vektoria  $u$  ja  $v$ ; huomaa, että työväline lisää vektoreille alku- ja loppupisteet

➤ piilota pisteiden A, B, C ja D nimet

➤ lisää piirtoalueelle piste E

➤ lisää vektori, jonka alkupiste on E ja jonka suunta ja pituus on kuin vektorilla  $u$ ; huomaa, että työväline lisää riippuvan pisteen E' ja luo sitten vektorin EE'

➤ lisää samoin vektori, jonka alkupiste on edellisen kohdan piste E' ja suunta ja pituus kuten vektorilla  $v$ ; työväline lisää pisteen E'' ja luo vektorin E'E''

➤ lisää neljäs vektori edellisten kohtien pisteestä E' pisteeseen E''

➤ tyyllitele mielesi mukaan!



# Tehtävä 2:

## Vektoreita syöttökentän kautta

### Näytä/piilota valintaruutu

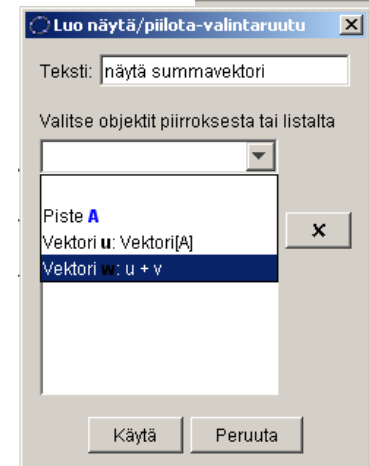
- luo syöttökentän kautta piste  $A = (4, 6)$   
piilota pisteen nimi näkyvistä
- luo syöttökentän kautta kaksi vektoria:

$u = \text{Vektori}[A]$

$v = \text{Vektori}[(3, 0)]$

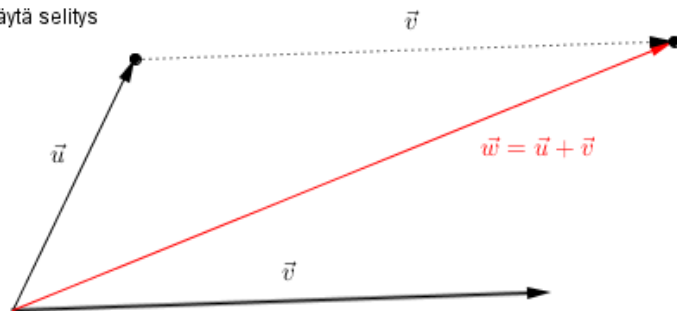
Huomaa: voit jälkikäteen muuttaa vektorien suuntaa ja pituutta hiirellä mutta alkupiste pysyy origossa

- laske syöttökentän kautta vektorien summa:  $w = u + v$
- lisää näytä/piilota summavektorille





- näytä summavektori
- näytä selitys



## Vektorien summa: selityksen lisääminen

Tapa 1: vektorin  $v$  kopio, jonka alkupiste on  $A$

- luo vektorista  $v$  *kopio* (kuvassa katkoviivalla), jonka alkupiste on  $A$ ; suunta ja pituus kuten vektorilla  $v$
- luo toinen näytä/piilota valintaruutu tälle vektorille (kuten tehtiin summavektorille)



Tapa 2: vektorin  $v$  kopio, jota pystyy siirtelemään piirtoalueella

- lisää piirtoalueelle uusi piste  $B$
- tehdään vektorista  $v$  *kopio*, jonka alkupiste on  $B$ ; suunta ja pituus on kuin vektorilla  $v$
- nyt kopiota voi siirrellä piirtoalueella ja sen avulla havainnollistaa, miten summavektori määräytyy



**Vinkki!** Voit lisätä vektoreille (ja muille objekteille) nimen manuaalisesti

- mene vektorin ominaisuuksiin -> Ikkunassa on nimen ja määritelmän alapuolella vaihtoehto **Teksti**
- tähän voit kirjoittaa myös matemaattisia kaavoja LaTeX-koodina

Vektorimerkin saa komennolla  $\vec{u}$

- dollarimerkit tarvitaan, jotta ohjelma tunnistaa kirjoituksen matemaattiseksi tekstiksi (LaTeX-koodiksi)
- näin lisätyn nimen saa näkyville valitsemalla **Näytä nimi->Teksti**

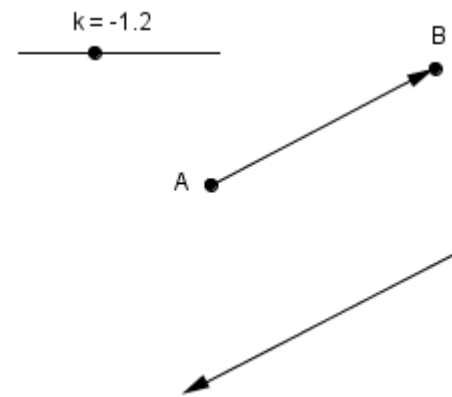


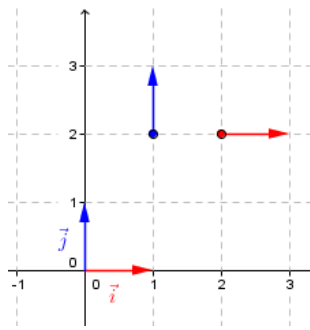
# Tehtävä 3

## Vektorin kertominen skalaarilla

Havainnollistetaan, miten skalaarilla (luvulla) kertominen muuttaa vektorin ominaisuuksia:

- luo piirtoalueelle liuku  $k$  välille  $-5...5$
- lisää kaksi pistettä:  $A = (1, 3)$   $B = (4, 4)$
- lisää vektori:  $v = \text{Vektori}[A, B]$
- lisää vektori:  $k * v$
- tyylittele mielesi mukaan!





# Tehtävä 4

## Yksikkövektoreita

- x-akselin suuntainen yksikkövektori  $\hat{i}$  saadaan kahdella vaihtoehdoisella syöttökentän komennolla (valitse toinen):

```
i=Yksikkövektori[y=0]
```

```
i=(1, 0)
```

- ensimmäisellä tavalla piirretty vektori on paikkaan kiinnitetty; sitä ei voi siirtää eikä suuntaa eikä pituutta muuttaa
- jälkimmäisessä tapauksessa vektoria voi siirtää ja sen suunta ja pituus ovat myös muunneltavissa
- jos käytit jälkimmäistä komentoa, **kiinnitä** vektori  $\hat{i}$  sen ominaisuuksista (ettei sitä ei voi muuttaa)
- lisää piste:  $A = (2, 2)$
- lisää vektorin  $\hat{i}$  kopio, jonka alkupiste on  $A$ ; tämän vektorin paikkaa voi siirtää pistettä  $A$  liikuttelemalla ja se pysyy yksikkövektorina (kunhan  $\hat{i}$ :tä ei muuteta)
- lisää samaan tapaan y-akselin suuntainen yksikkövektori
- lisää vektoreille nimet



**Vinkki!** magneetti->  
Pisteen sieppaus->  
Kiinnitetty koordinaatistoon





# Tehtävä 5

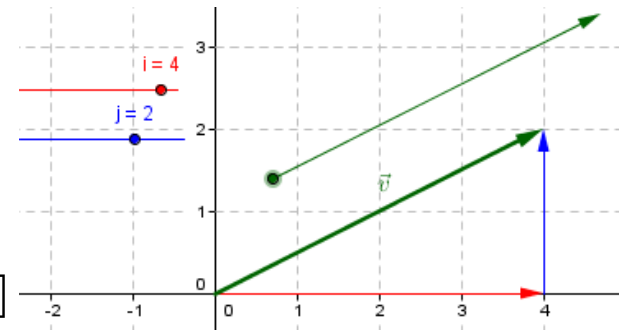
## Vektorin komponentit

- lisää kaksi liukua  $i$  ja  $j$  välille  $-5...5$  askelvälinä 1

- lisää vektorikomponentit:

$$a = (i, 0)$$

$$b = \text{Vektori}[(i, 0), (i, j)]$$



- lisää vektori:  $v = a + b$
- lisää vielä vektorin  $v$  kopio, jota voi liikutella piirtoalueella
- lisää halutessasi ohjetekstejä, väriä ja valintaruutuja selkiyttämään esitystä



# 3D-piirtoalueen perusasetukset

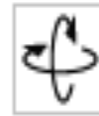
Näytä – 3D-piirtoalue  
Näkymät → 3D-grafiikka

- punainen akseli = x-akseli  
vihreä akseli = y-akseli  
sininen akseli = z-akseli
- xy-taso = peruspiirtoalue (2D, piirtoalue 1), eli jos piirrät jotain peruspiirtoalueelle, se näkyy 3D:ssä xy-tasossa
- piirroksen näkyvyyttä eri piirtoalueilla (2D1, 2D2 ja 3D) voi muuttaa piirroksen Ominaisuuksissa Lisäasetukset-välilehdellä
- mutteri → piirtoalueen asetukset
- näytä/piilota akselit ja koordinaattiruudukko xy-tasolle
- 3D-silmälasien käyttäjille asetus päälle
- takaisin alkuasemaan ”koti”-kuvakkeesta



## Tärkeitä työvälineitä:

- kierrä 3D-näkymää
- siirrä 3D-näkymää
- Siirrä työväline
- yksi hiiren klikkaus piirtoalueella muuttaa siirron suuntaa



Kierrä 3D näkymää



Siirrä piirtoaluetta



# Tehtävät 13-14

## Maapallon pituus- ja leveyspiirit

### Tarvittavat komennot:

- Ympyrä[keskipiste,säde] (piirrä xy-tasoon, keskipisteellä 2 koordinaattia)
- Pallo[keskipiste,säde] (piirrä xyz-avaruuteen, keskipisteellä 3 koordinaattia)
- Ympyrä[akseli,piste ympyrältä]
  - akseli on sovelmassa aina jokin koordinaattiakseleista, mutta se voi komennossa olla mikä vaan muukin suora
  - piste on 3D-piste
  - koordinaattiakselit: *xAkseli*, *yAkseli*, *zAkseli*
- piste lisätään pallopinnalle *Uusi piste* –työvälineellä
- leikkauspisteet saadaan työvälineellä
- janojen piirtämiseen voi käyttää työvälinettä tai komentoa *Jana[piste,piste]*
- kulman piirtämiseen kannattaa käyttää komentoa *Kulma[oikean kyljen piste, kärkipiste, vasemman kyljen piste]* (työvälineen käyttö on kömpelöä)

HUOM 1. 2D-Piirtoalue (peruspiirtoalue) ON 3D-Piirtoalueen xy-taso, eli kun piirrät 2D-tasolle, se näkyy 3D-xy-tasossa.

HUOM 2. Kun lisäät 2D-Piirtoalueelle (peruspiirtoalue) ABC-tekstiä, se saattaa näkyä 3D-piirtoalueella. Nuppineulakiinnitys auttaa.

HUOM 3. Jos piirrät 2D-Piirtoalueelle 2, se ei oletusarvoisesti näy 3D-piirtoalueella.



Piirtoalue 2

leveyspiiri  $53^\circ$   
pituuspiiri  $72^\circ$

pohjoinen

itäinen



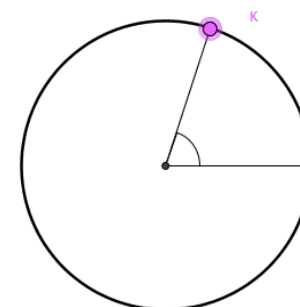
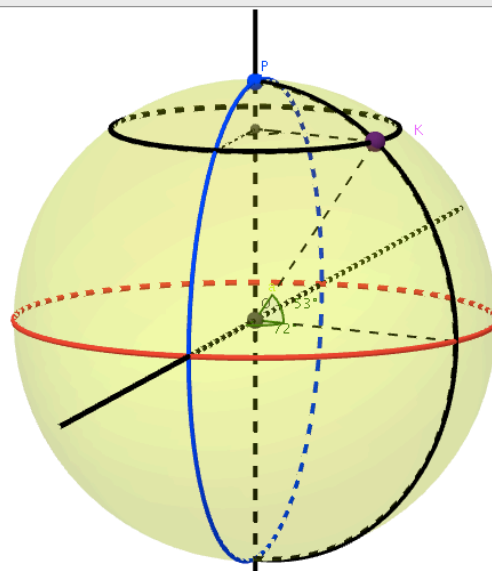
Säädä pisteen K

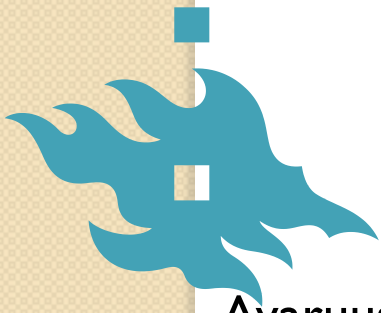
\*pituuspiiri liukukytkimellä.

\*leveyspiiri liikuttamalla pistettä K pitkin pituuspiiriä.

3D-piirtoalue

taso i:n näkymä





# Tehtävä 18

## Lieriö kartion sisällä

- Avaruuskappaleen piirtäminen kannattaa usein aloittaa piirtämällä sen pohja 2d-Piirtoalueelle (peruspiirtoalueelle).

### Tärkeimmät sovelmassa käytetyt:

- Kartio[pohja,korkeus]
- Lieriö[pohja.korkeus]

Pohjana voi tietysti olla mikä hyvänsä kuvio, vaikka tässä tehtävässä pohjana on aina ympyrä.

Huomaa, että algebraikkunassa näkyvät: tilavuus, vaipan pinta-ala.

Kartion sisään on piirretään mahdollisimman suuri suora ympyrälieriö, jonka pohjasädettä pystyy säätämään (2D-Piirtoalueella). Tehtävänä on löytää tilavuudeltaan mahdollisimman suuri lieriö. Tämä on tyypillinen lukiomatematiikan ääriarvotehtävä.

Lisää Piirtoalueelle 2 piste, jonka koordinaatit ovat:

(lieriön säde, lieriön tilavuus)

- Pisteelle jälki päälle.
- Tutki, miten säteen muutokset vaikuttavat tilavuuteen!

