

Nimi: \_\_\_\_\_

**Helsingin yliopisto**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos (opettajankoulutus)**  
**GeoGebra opetuksessa**  
**Kevät 2015**  
**Viikko 16 (ma 13.4. ja ke 15.4.)**

## Työviikko 5 Taso- ja avaruusgeometriaa

*Ohjeet harjoitustehtävien tekemiseen ja palauttamiseen:*

- \* Käytä tehtävien ratkaisemiseen GeoGebraa.
- \* Kun olet ratkaissut tehtävän – ja olet valmis esittämään sen ryhmälle, merkitse tehtävän vasemmalla puolella olevaan ruutuun 1.
- \* Jos ratkaisit tehtävästä osan (esimerkiksi puolet alakohdistista) tai et saanut ratkaisua loppuun saakka, merkitse ruutuun 1/2.
- \* Tehtävät 13-14 muodostavat yhdessä yhden tehtävän, jonka tekemällä ansaitsee 2 pistettä. Arvioi itse, onko työsi 0,5 vai yhden vai 1,5 kahden pisteen arvoinen.
- \* Laske lopuksi tekemiesi tehtävien kokonaismäärä ja merkitse pisteet ensimmäiseen ruutuun. Puolikkaista tehtävistä saat puolikkaista pisteitä.
- \* Aikaa tehtävien ratkaisemiseen on viikko: palauta tämä tehtäväpaperi viimeistään ensi viikon maanantaina ryhmätapaamisen alkaessa.
- \* Ei ole välttämätöntä tallentaa jokaisen tehtävän työtiedostoa työtiedostoa (ellei tehtävänannossa nimenomaisesti tätä pyydetä). Muistathan kuitenkin, että pisteen merkitseminen edellyttää, että olet valmistautunut esittämään ratkaisun ryhmälle.

***Tehtävissä viitataan LUMA-keskuksen keväällä 2015 järjestämän GeoGebra-verkkokoulutuksen videomateriaaliin. Linkit videoihin löytyvät kurssisivulta. Tehtävissä tarvittavat kuvatiedostot löytyvät kurssisivulta.***

***Tällä työviikolla ratkaistuja tehtäviä yhteensä: merkitse lukumäärä ruutuun***

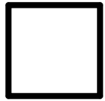
1. Tutki nelikulmion kärkipisteiden koordinaattien muuttumista, kun kuvio peilataan  $x$ -akselin tai origon suhteen. Seikkaperäisemmät ohjeet löytyvät luentokalvoista.

2. Konstruoij kulmanpuolittaja. Ota konstruktion vaiheiden selauspainike esille ja esitä konstruktiosi vaihe vaiheelta. Vaiheittainen esittäminen: **video 1**.

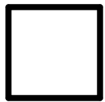
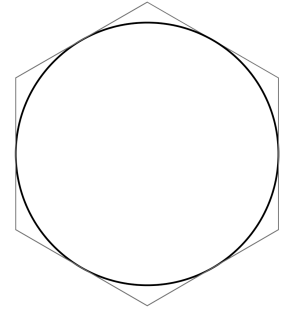
3. Konstruoij suorakulmio. Tutki konstruktion vaiheita. Tarkemmat ohjeet löytyvät Ohion yliopiston *An Introduction to GeoGebra* –oppaan sivuilta 19-21. Linkki oppaaseen on kurssin kotisivulta.

4. Yksikkökiekon (säde  $r = 1$ ) pinta-ala on tunnetusti  $\pi$ . Määritä **alalikiarvoja** luvulle  $\pi$  *Arkhimedeen ekstaustiomenetelmällä*: piirrä ympyrä, jonka säde on 1, ja sen sisäpuolelle säännöllisiä  $n$ -kulmioita ( $n:n$  arvoa voi säätää liukukytkimellä). Luvun  $n$  kasvaessa monikulmion pinta-ala antaa yhä tarkemman likiarvon  $\pi$ lle. Tarkemmat ohjeet löydät Ohion yliopiston *An Introduction to GeoGebra* –oppaan sivuilta 22. Linkki oppaaseen on kurssin kotisivulta.

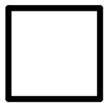
Nimi: \_\_\_\_\_



5. (edellisen jatkotehtävä) Määritä **ylälikiarvoja** luvulle  $\pi$  *Arkhimedeen menetelmällä*: piirrä ympyrä, jonka säde on 1, ja sen ulkopuolelle säännöllisiä  $n$ -kulmioita. Luvun  $n$  kasvaessa monikulmion pinta-ala antaa yhä tarkemman likiarvon piille.



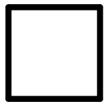
6. Talleta **talo.jpg** koneellesi ja tuo kuva piirtoalueelle. Tee siitä taustakuva. Selvitä talon katon harjan kaltevuuskulma. Kuvassa on useampia katonharjoja, joten valitse niistä yksi. Katso tarvittaessa apua: **video 2**.



7. Selvitä Helsinki-Lahti moottoritietä kohta, joka on yhtä kaukana Orimattilasta ja Hyvinkäältä. Käytä hyväksi **kartta.jpg**-kuvaa. Seikkaperäisemmät ohjeet löytyvät luentokalvoista.



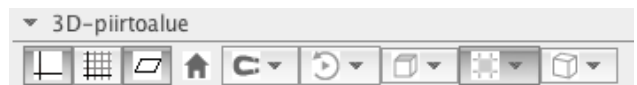
8. Kolme ystävästä asuvat eri puolilla eteläistä Suomea: yksi asuu Vaasassa, toinen Joensuussa ja kolmas Hyvinkäällä. Ystävykset päättävät tavata sellaisessa paikassa, johon kaikilla olisi yhtä pitkä matka. Auta ystävyksiä. Missä kaupungissa ystäväysten kannattaa tavata? Talleta **suomikartta.png** koneellesi ja tuo piirtoalueelle. Tee siitä taustakuva. Lisää pisteet ystäväysten kotikaupunkien kohdalle. Tehtävänä on löytää neljäs piste, joka on yhtä kaukana näistä kolmesta pisteestä. Haettu piste on kotikaupunkien kautta kulkevan ympyrän keskipiste, joka löytyy tunnetusti kotikaupunkeja yhdistävien janojen keskinormaalien leikkauspisteestä.



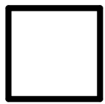
9. Tutki kuvassa **symmetria.jpg** esiintyviä symmetrioita. Kuvalla on sekä symmetri akseli että symmetriapiste. Seikkaperäisempiä ohjeita löydät luentokalvoista sekä **videon 2** lopusta.



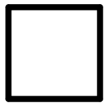
10. Tutustu 3D-piirtoalueen toimintaan ja perusasetuksiin:
- ota sekä 2D-peruspiirtoalue että 3D-piirtoalue esille, piirrä jotain 2D-piirtoalueelle (huomaa, että peruspiirtoalue on 3D-piirtoalueen  $xy$ -taso)
  - selvitä, miten 3D-piirtoalueen asetuksia muuttamalla saadaan  $y$ -akseli (vihreä) ylöspäin
  - selvitä, mitä asetuksia “rajauslaatikolla” on
  - tutustu 3D-piirtoalueen *Siirrä* ja *Kierrä piirtoaluetta*-työvälineisiin
  - tutustu piirtoalueen pika-asetuksiin:



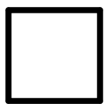
11. Pisteiden lisääminen 3D-piirtoalueelle:
- lisää  $xy$ -tasolle piste (tämä on helppoa, koska pisteen voi lisätä 2D-peruspiirtoalueelle!)
  - lisää piste  $z$ -akselille: voit käyttää *Uusi piste* -työvälinettä tai syöttökentän komentoa *Piste[zAkseli]*
  - lisää vapaa piste: tässä *Uusi piste* -työväline ei toimi, vaan piste syötetään syöttökentän kautta ilmoittamalla koordinaatit, esimerkiksi (1,2,3)
  - liikuttele vapaata pistettä (*Siirrä*-työväline, klikkaus muuttaa siirron suuntaa)
  - projisioi vapaa piste (a)  $xy$ -tasolle, (b)  $z$ -akselille syöttämällä koordinaatit syöttökentän kautta:  $xy$ -tasossa olevan pisteen  $z$ -koordinaatti = 0, ja  $z$ -akselilla olevan pisteen  $x$ - ja  $y$ -koordinaatit = 0



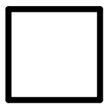
12. Suorien ja tasojen lisääminen 3D-piirtoalueelle:
- lisää 3D-piirtoalueelle kolme pistettä  $A, B$  ja  $C$
  - piirrä suora pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta: työväline tai komento  $Suora[A,B]$
  - piirrä suora, joka kulkee pisteen  $A$  kautta ja on jonkin koordinaattiakselin suuntainen: komento  $Suora[A,suora]$
  - piirrä taso pisteiden  $A, B$  ja  $C$  kautta: työväline tai komento  $Taso[A,B,C]$
  - piirrä taso, joka kulkee pisteen  $A$  kautta ja on jonkin koordinaattiakselin suuntainen
  - piirrä taso, joka kulkee pisteen  $A$  kautta ja on jonkin piirtoalueelle jo piirtämäsi suoran suuntainen
  - syötä jonkin tason yhtälö, esimerkiksi  $2x + y - z = 0$   
huomaa: esimerkiksi yhtälö  $y = x + 1$  määrittää suoran, kun se piirretään 2D-piirtoalueelle, mutta tason kun se piirretään 3D-piirtoalueelle
- (Voit halutessasi siivota piirtoaluetta poistamalla piirroksia. Jätä yksi tasoista.)
- lisää tasolle piste, suora, jana tai vaikka ympyrä tai kolmio
  - tee tasosta 2D-näkymä: hiiren oikea  $\rightarrow$  Luo 2D-näkymä



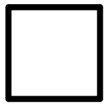
- 13.-14. Tutustu ympyröiden ja pallojen piirtämiseen: tee havainnollistus, jolla voidaan tutkia maapallon pituus- ja leveyspiirejä ja sijainnin ilmoittamista näiden avulla. Ohjeita löytyy luentokalvoista sekä verkkomateriaalin videosta.



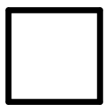
15. Tutustu siihen, miten vektoreita piirretään GeoGebrassa. Luentokalvoista löytyy tarkemmat ohjeet. Valitse **kaksi tehtävää** luentokalvojen vektoritehtävistä 1-5.



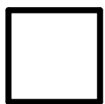
16. YO kevät 2015, lyhyt, tehtävä 15(c). Yhdysjanat origosta pisteisiin  $(1,2,1)$ ,  $(1,-1,1)$  ja  $(2,0,-2)$  muodostavat suorakulmaisen särmiön kolme särmää. Mihin pisteeseen päättyy origosta alkava särmiön avaruuslävistäjä? Piirrä ko. särmiö.  
*Vinkki:* hyödynnä vektoreita.



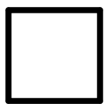
17. Piirrä (2D peruspiirtoalueelle) kolmio, jonka kärkipisteitä voi liikutella. Konstruoi kolmion sisään ympyrä, joka sivuaa kolmion sivuja (kolmion sisään piirretty ympyrä). Ole huolellinen, että konstruktio on oikein: ympyrä pysyy kolmion sisällä kun kärkipisteitä liikutellaan.



18. Suoran ympyräkartiion pohjan säde  $R=1$  ja korkeutta  $H$  voidaan muuttaa. Kartion sisään asetetaan mahdollisimman suuri suora ympyrälieriö. Mikä on suurimman mahdollisen lieriön pohjaympyrän säde? Miten ratkaisu riippuu kartion korkeudesta  $H$ ? Havainnollista tilannetta GeoGebralla. Seikkaperäisempiä ohjeita on luentokalvoissa sekä verkkomateriaalin videossa *Kartiot ja lieriöt*.



19. Havainnollista jonkin käyrän, esimerkiksi käyrän  $y = \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 6$ , pyörähtämistä  $x$ -akselin (tai  $y$ -akselin) ympäri. Ohjeita löytyy verkkomateriaalin videosta.



20. Piirrä pyramidi, jonka pohja on jokin monikulmio (esimerkiksi neliö), ja jonka korkeutta pystyy säädellä.
- (a) Tutustu *Tasolevitys*-työvälineen toimintaan.
- (b) Luo liuku  $0 \leq n \leq 1$ , askelväli vaikkapa 0.1, ja havainnollista tasolevityksen syntymistä syöttämällä komento  $Tasolevitys[pyramidin\ nimi,n]$ . Tutki liukukytkimen toimintaa. Seikkaperäisemmät ohjeet on selostettu verkkomateriaalin videossa *Pyramidin tasolevitys*.