Nimi:____

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos (opettajankoulutus)
GeoGebra opetuksessa
Kevät 2015
Viikko 14 (ma 30.3. ja ke 1.4.)

Työviikko 4 Analyysiä

Ohjeet harjoitustehtävien tekemiseen ja palauttamiseen:

- *Käytä tehtävien ratkaisemiseen GeoGebraa.*
- *Kun olet ratkaissut tehtävän – ja olet valmis esittämään sen ryhmälle, merkitse tehtävän vasemmalla puolella olevaan ruutuun* $\boxed{1}$.
- *Jos ratkaisit tehtävästä osan (esimerkiksi puolet alakohdista) tai et saanut ratkaisua loppuun saakka, merkitse ruutuun* $\boxed{1/2}$.
- *Laske lopuksi tekemiesi tehtävien kokonaismäärä ja merkitse pisteet ensimmäiseen ruutuun. Puolikkaista tehtävistä saat puolikkaita pisteitä.*
- ***Pääsiäisloma on 2.4.-8.4.,** joten aikaa tehtävien ratkaisemiseen on tällä kertaa kaksi viikkoa: palauta tämä tehtäväpaperi pääsiäisen jälkeen maanantaina 13.4. ryhmätapaamisen alkaessa.*
- *Ei ole välttämätöntä tallentaa jokaisen tehtävän työtiedostoa työtiedostoa (ellei tehtävänannossa nimenomaisesti tätä pyydetä). Muistathan kuitenkin, että pisteen merkitseminen edellyttää, että olet valmistautunut esittämään ratkaisun ryhmälle.*

Tällä työviikolla ratkaistuja tehtäviä yhteensä: *merkitse lukumäärä ruutuun*

1. a) Piirrä funktioperheen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{kun } x < -2 \\ ax^3 + bx, \text{kun } x \geq -2 \end{cases}$
kuvaajia parametrien *a* ja *b* eri arvoilla. Hyödynnä *Liuku*-kytkintä.
b) Määritä sellaiset parametrien *a* ja *b* arvot, että funktio on kohdassa $x = -2$ jatkuva.
c) Määritä sellaiset parametrien *a* ja *b* arvot, että funktio on kohdassa $x = -2$ jatkuva ja toteuttaa lisäksi ehdon $f(-2) = 2$.
Tehtävässä hyödyllisiä komentoja löydät luentokalvoista.

2. Tutustu syöttökentän kautta annettaviin funktion analysoimiseen liittyviin komentoihin tutkimalla funktiota $f(x) = 0.5x^3 + 2x^2 + 0.2x - 1$:
   - Selvitä ääriarvokohdat ja ääriarvot (likiarvot).
   - Selvitä käännepisteet (kuvaajan kuperuus vaihtuu).
   - Derivoi. *Ohje:* syöttökentän komennot `Derivaatta[f]` tai `f′(x)`
   - Piilota derivaattafunktion kuvaaja.
   - Luo kokonaislukuliuku *n* =1,2,3,4 ja syötä sen jälkeen syöttökenttään komento `Derivaatta[f,n]`
   - Selvitä edellisen kohdan derivaattafunktion nollakohdat (likiarvot); huomaa yhteys ääriarvokohtiin ($n = 1$) ja käännepisteisiin ($n = 2$)
   - Tutustu komentoihin `Integraali[f]` sekä `Integraali[f,x1,x2]`

   Vihje: paina syöttökentän oikeassa laidassa olevaa play-nappulaa ja klikkaa otsaketta "Funktiot ja laskenta"; saat näkyville listan kaikista komennoista.

Nimi:_______________________________________

☐ 3. Tutustu *Funktion analysointi* –työvälineeseen tutkimalla funktiota $f(x) = 0.5x^3 + 2x^2 + 0.2x - 1$ välillä [-2,1]

- mikä on funktion pienin ja suurin arvo? entä keskiarvo?
- mikä on funktion ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala?
- mikä on funktion määrätyn integraalin?
- miten selität edellisten kohtien lukujen eron (kuvan perusteella)?
- taulukoi funktion arvoja välillä 0,5 askeleen välein
- taulukoi myös funktion peräkkäisten arvojen erotuksia: taulukkoarvojen perusteella, millä välillä funktion kuvaaja nousee/laskee jyrkimmin?
- taulukoi vielä derivaatan arvotkin: vertaa edellisen kohdan johtopäätökseen

☐ 4. Tutki: miten muuttuvat pisteen koordinaatit, kun se peilataan suoran $y = x$ suhteen?

☐ 5. Jos funktiolla on käänteisfunktio, niin funktion ja käänteisfunktion kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen. Tutki sinifunktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktiota. Tarkemmat ohjeet löydät luentokalvoista.

☐ 6. Havainnollista *käänteisfunktion derivointisääntöä* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, missä $f(x) = y$. Tarkemmat ohjeet löydät luentokalvoista.

☐ 7. Havainnollista *derivaatan määritelmää*: Piirrä jokin funktio, esimerkiksi $f(x) = 0.5x^3 + 2x^2 + 0.2x - 1$.

- Lisää funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piste *P*.
  Ohje: Tämä onnistuu syöttökentän komennolla `P=(1,f(1))`. Huomaa, että et pysty liikutella näin piirrettyä pistettä.
- Lisää funktion kuvaajalle toinen piste. Käytä *Uusi piste* -työvälinettä. Huomaa, että pistettä voi liikutella kuvaajalla.
- Piirrä pisteiden kautta sekantti ja selvitä sen kulmakerroin.

Kun liikutat toista pistettä kohti pistettä *P*, sekantti kiertyy tangentiksi ja sen kulmakerroin lähestyy derivaatan arvoa $f'(1)$.

- Piirrä funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ tangentti ja selvitä sen kulmakerroin.
- Laske funktion derivaatta kohdassa $x = 1$. *Ohje:* syöttökentän komento $f'(1)$.

Voit halutessasi katsoa ideoita myös *Johdanto GeoGebraan* -monisteen Harjoituksesta II.b (s. 34). Linkin monisteeseen löydät kurssin kotisivulta.

☐ 8. Havainnollista *derivaattafunktion käsitettä* ja potenssifunktion derivointisääntöä. Tarkemmat ohjeet löydät luentokalvoista.

☐ 9. Havainnollista *määrätyn integraalin käsitettä* tutkimalla funktion $f(x) = \sin(2x) - \frac{x^2}{10} + 3$ kuvaajan ja x-akselin välillä [-2,4] rajaaman tasoalueen pinta-alaa: Laske pinta-alalle likiarvo

a) *alasumman* avulla kun suorakaiteiden lukumäärä on 15;
b) *yläsumman* avulla kun suorakaiteiden lukumäärä on 15.
c) Miten suorakaiteiden korkeudet määräytyvät a) ja b)-kohdissa? Antavatko nämä likiarvot ala- vai yläarvion?

Lisää laskuun dynaamisuutta niin, että pystyt tihentämään jakoa *Liuku*-kytkimen avulla. Katso tarvittaessa tarkempia ohjeita kurssin kotisivulta löytyvästä tiedostosta.

Nimi:_______________________________________

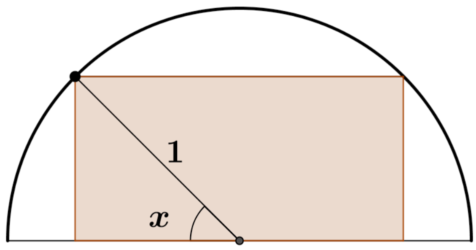
10. Jatkoa edelliseen tehtävään: laske pinta-alalle toisenlainen likiarvo:
a) käytä komentoa `VasenSumma[f,-2,4,15]`.
b) käytä komentoa `Puolisuunnikassumma[f,-2,4,15]`.
c) Miten pinta-alan likiarvo määräytyy puolisuunnikassumma ja vasen summa -tilanteissa? Antavatko nämä ala- vai ylälikiarvion pinta-alalle?
d) Mikä likiarvoista mielestäsi antaa parhaan arvion?
Laske lopuksi pinta-alan tarkka arvo `Integraali[f,-2,4]`-komennon avulla. Osuiko d)-kohdan arvauksesi oikeaan?

11. Tutki, miten suorakulmion pinta-ala riippuu sen sivun (kannan tai korkeuden) pituudesta kun piiri on vakio. Selvitä, mitkä ovat pinta-alaltaan suurimman suorakulmion mitat. Tarkemmat ohjeet löydät luentokalvoista.

12. Konstruoi tasakylkinen kolmio, jonka kylkien pituus on 5 mutta kannan pituutta tai korkeutta pystyy muuttamaan yhtä kärkipistettä liikuttamalla. Huomaa, että konstruktion voi rakentaa usealla vaihtoehtoisella tavalla. Opettajana kannattaa miettiä, mikä on tutkittavan asian kannalta paras vaihtoehto. Katso tarkempia ohjeita luentokalvoista.

13. Edellinen jatkuu: tutki, miten kolmion pinta-ala riippuu kannan pituudesta tai korkeudesta. Miten kuvailisit riippuvuutta? Mitkä ovat pinta-alaltaan suurimman kolmion mitat? Hyödynnä Piirtoaluetta 2. Katso tarkempia ohjeita luentokalvoista.

14. Puoliympyrän säde on 1. Sen sisään on piirretty suorakulmio, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla (kokoa voidaan säätää puoliympyrän kaarella olevaa pistettä liikuttamalla). Valitse muuttujaksi kuvaan merkityn kulman *x* suuruus radiaaneina. Havainnollista suorakulmion pinta-alan riippuvuutta kulman *x* suuruudesta. Mitkä ovat pinta-alaltaan suurimman suorakulmion mitat (likiarvot)?



15. Tutki paraabelilla $y = x^2$ olevan pisteen etäisyyttä pisteestä $(0,5)$. Etsi se piste, tai ne pisteet, joka on lähinnä pistettä $(0,5)$:
➢ Aloita piirtämällä paraabeli, lisäämällä piste *A* paraabelille sekä piste *B=(0,5)*.
Tästä voidaan edetä monellakin eri tavalla. Yksi mahdollisuus:
➢ Yhdistä pisteet *A* ja *B* janalla *a.*
➢ Luo syöttökentän kautta piste *K,* jolla on sama *x*-koordinaatti kuin pisteellä *A* ja jonka *y*-koordinaatti ilmoittaa pisteiden *A* ja *B* etäisyyttä (janan *a* pituutta); siis
K=(*x*(*A*),*a*).
Valitse pisteelle *K* jälki päälle ja liikuta pistettä *A* pitkin paraabelia. Etsi vielä työväline *Ura* ja napauta pisteitä *K* ja *A* (tässä järjestyksessä).
Palauta vastaukset kysymyksiin:
a) Miten tehtävän ratkaisu luetaan kuvasta? Ilmoita lähinnä pistettä (0,5) olevien paraabelin pisteiden 2-desimaaliset likiarvot.
b) Ilmoita lyhimmän etäisyyden 2-desimaalinen likiarvo.

16. Tutki eksponenttifunktioita ja havainnollista *Neperin lukua*
$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,\ldots$
Tarkemmat ohjeet löydät luentokalvoista.

Nimi:____

☐ 17. Tutki: Millä vakion $a > 1$ arvolla funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, a]$ rajaaman tasoalueen pinta-ala on 1? Kysymys johtaa *Neperin lukuun.* Hyödynnä tekstikenttää kuten tehtävässä 16. Ohjeita saat ryhmätapaamisessa.

☐ 18. Muodosta eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ toisen asteen Taylorin polynomit kehityskeskuksena $x = 0$ ja $x = 1$:

- Aloita syöttämällä funktio: `f(x)=e^x`
- Taylorin polynomi saadaan komennolla *TaylorSarja[funktio,kehityskeskus,asteluku]* eli nyt `TaylorSarja[f,0,2]`ja `TaylorSarja[f,1,2]`

Lisää sovelmaan muunneltavuutta:

- liuku, jolla voi muuttaa Taylorin polynomin astelukua
- tekstikenttä, jonka kautta kehityskeskusta voi muutella
- toinen tekstikenttä, jonka kautta funktiota voidaan muuttaa

☐ 19. Tietokoneohjelma arpoo satunnaislukuja. Satunnaisluku on jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{20}\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right), & \text{kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$

Kun ohjelma on arponut lukun, se pyöristää sen normaalien pyöristyssääntöjen mukaan ja antaa vastaukseksi kokonaisluvun.

a) Piirrä tiheysfunktio.

b) Millä todennäköisyydellä ohjelma antaa tulokseksi luvun 5 tai 6?

☐ 20. Lukujonoja voidaan GeoGebrassa tutkia laskentataulukossa (vrt. Työviikon 3 tehtävä 5). Lukujonoja voidaan määritellä myös syöttökentän kautta komennon *Jono[lauseke,muuttuja,alkuarvo,loppuarvo]* avulla. *Jono*-komento on hyödyllinen myös monissa muissa yhteyksissä. Tutustu *Jono*-komentoon (englanniksi *Sequence*) tekemällä Ohion yliopiston *An Introduction to GeoGebra* –oppaan sivulta 48 löytyvät harjoitukset. Linkin oppaaseen löydät kurssin kosivulta.