Funktioita, analyysiä, optimointia…

GeoGebrasta löytyy monipuoliset työvälineet funktioiden analysoimiseen:

- syöttökentän komennot, esimerkiksi:

```
RajaArvo[], Derivaatta[], Integraali[]
Integraali[funktio,alaraja,yläraja]
Nollakohta[], Ääriarvo[polynomi], Käänteis[funktio]
```

- työvälinepalkin *Funktion analysointi* –työväline

Lisäksi voidaan hyödyntää:

- *Liuku*-toimintoa
- *Jälki*-toimintoa
- rinnakkaisia piirtoalueita
- vaiheittaista esittämistä

Tehtävä 1
funktion toispuoleiset raja-arvot ja jatkuvuus

- Paloittain määritelty funktio saadaan komennolla

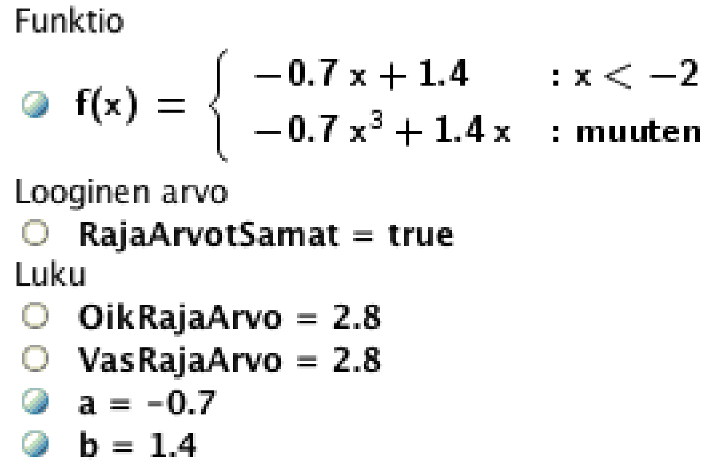
`Jos[ehto,lauseke,muuten]`

- `f(x)=Jos[x<-2,a*x+b,a*x^3+b*x]`
- <u>huomaa</u>: tässä tarvitaan kertomerkki `a*x^3`; jos kertomerkki jätetään pois, GeoGebra tulkitsee syötteeksi `(ax)^3`
- määrittelyssä on muuttujan x lisäksi parametrit a ja b, joten GeoGebra kysyy "*Luodaanko liukusäätimet*" – paina *Luo*

Tehtävässä ollaan kiinnostuneita funktion toispuoleisista raja-arvoista ja jatkuvuudesta kohdassa $x = -2$:

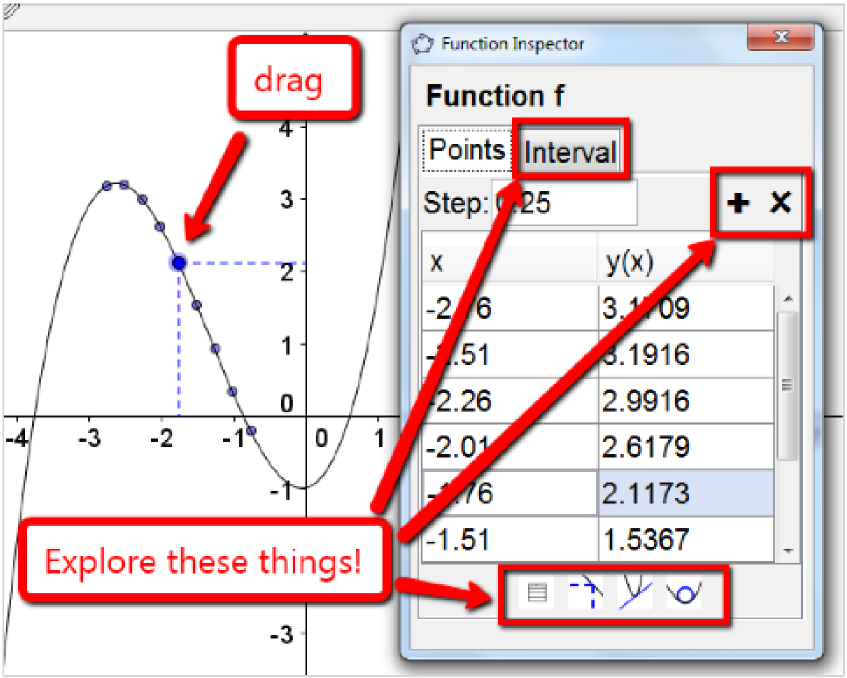
- komennot `RajaArvoOikea[f,-2]` ja `RajaArvoVasen[f,-2]`

Loogisen arvon määritteleminen



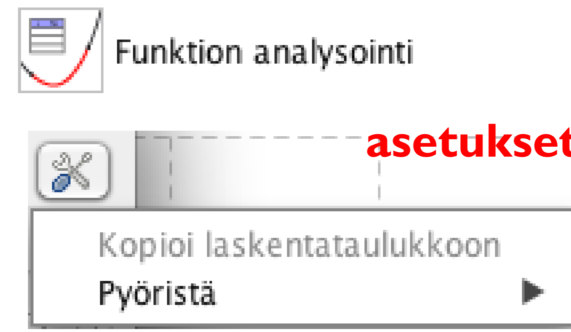
Jatkuvuutta tutkittaessa ollaan kiinnostuneita toispuoleisten raja-arvojen yhtäsuuruudesta. Tätä varten GeoGebrassa voidaan määrillä *looginen arvo*:

- katso algebraikkunasta millä nimillä GeoGebra nimesi oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot
- voit halutessasi muuttaa nimet kuvailevammiksi: yllä nimiksi on vaihdettu OikRajaArvo ja VasRajaArvo
- kirjoita syöttökenttään: `OikRajaArvo==VasRajaArvo` <u>huomaa</u> kaksi yhtäsuuruusmerkkiä
- Syöte tuottaa *loogisen arvon*, joka on joko `true` (ovat yhtäsuuret) tai `false` (eivät ole yhtäsuuret)



Tehtävä 3

Funktion analysoiminen



GeoGebra sisältää erityisen *työvälineen* funktion ominaisuuksien tutkimiseen. Sen avulla voidaan tutkia – ilman mitään etukäteisvalmistelua – funktion perusominaisuuksia:

- piirrä funktio `f(x)=0.5x^3+2x^2+0.2x-1`
- tutustu työvälinepalkista löytyvään *Funktion analysointi* –työvälineeseen
- Avautuvassa ikkunassa on kaksi välilehteä:
  Väli, joista löytyy listaus funktion eri ominaisuuksista
  Pisteet, jossa voi taulukoida funktion ja sen derivaattojen arvoja

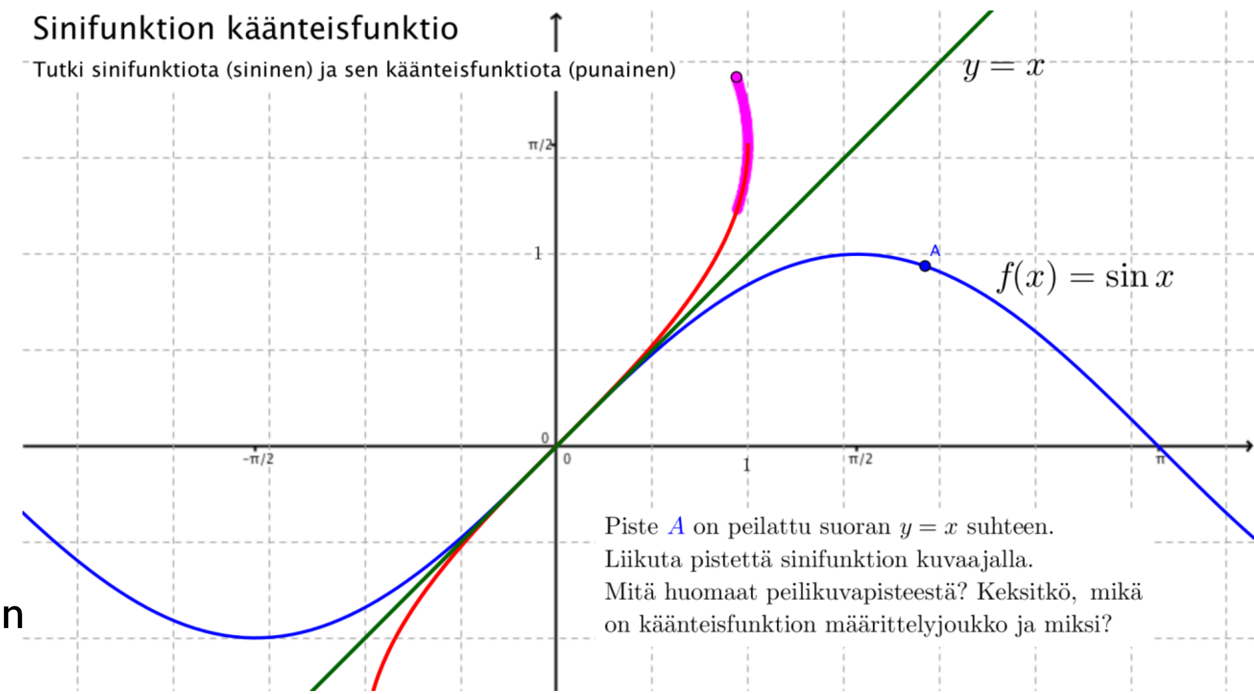
Tehtävä 5 kääntеisfunktio

Tutki GeoGebralla funktion `f(x)=sin(x)` käänteisfunktion olemassaoloa

GeoGebrassa on komento käänteisfunktiota varten: käänteisfunktion saa syöttökentän komennolla **Käänteis[f]**

Lisää sinifunktion kuvaajalle piste A ja peilaa se suoran y=x suhteen.

Ota peilipisteelle jälki käyttöön



Kuvaajien symmetriaominaisuus liittyy tehtävän 4 havaintoon: kun piste peilataan suoran y=x suhteen, sen koordinaatit vaihtavat paikkaa, eli peilaus on tason kuvaus (x,y)→(y,x)

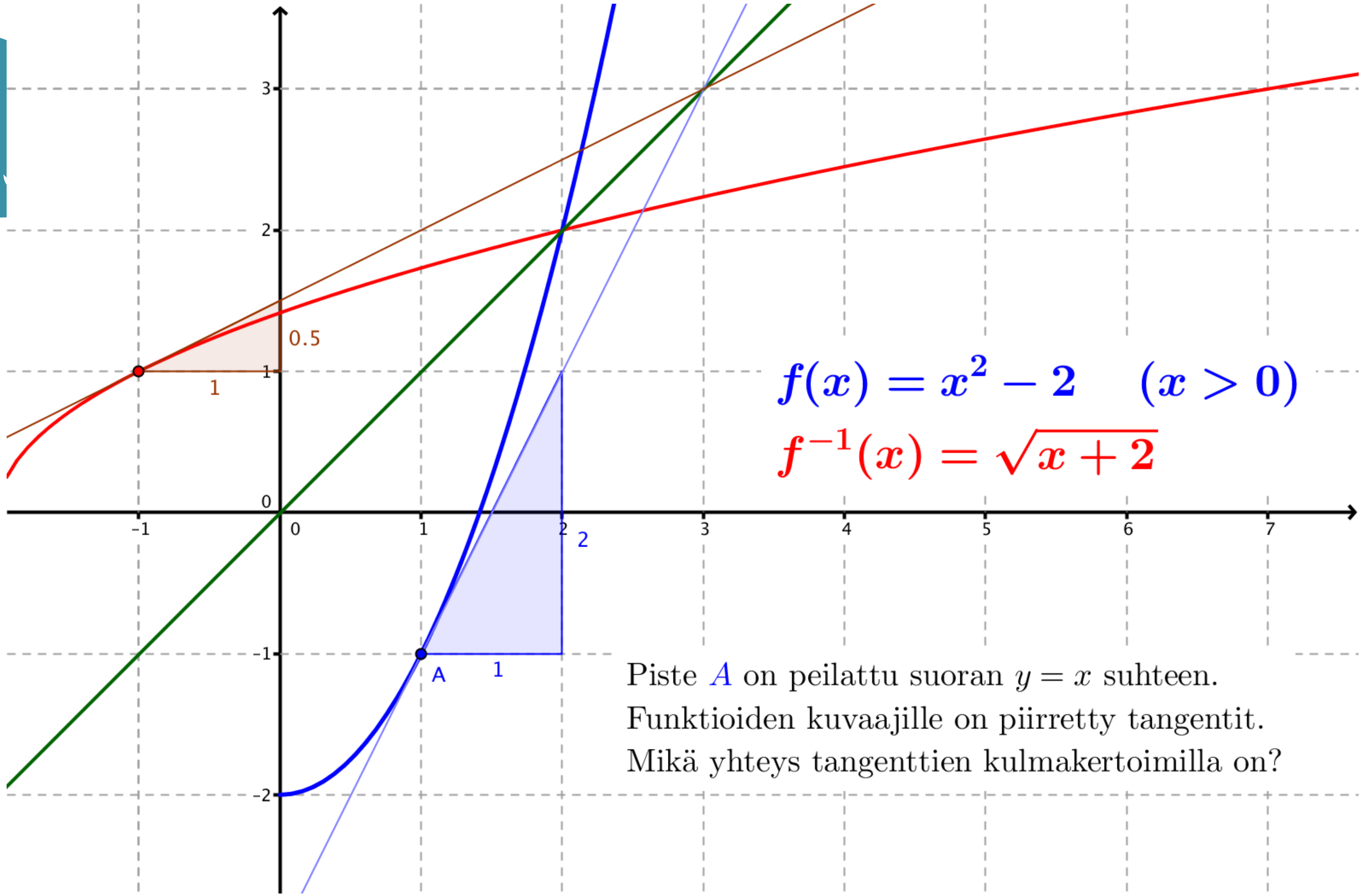
Tehtävä 6
käänteisfunktion derivointisääntö

Havainnollista käänteisfunktion derivointisääntöä:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

- piirrä funktio `h(x)=x^2-2`
- piirrä käänteisfunktio: `Käänteis[h]`

  huomaa: GeoGebra rajaa määrittelyjoukon automaattisesti, **mutta** ei osaa määrittää rajoitetulla määrittelyjoukolla annetun funktion käänteisfunktiota
- määrittele funktio *f*: `f(x)=Jos[x>0,h(x)]` ja piilota funktion h kuvaaja
- lisää funktion *f* kuvaajalle liikuteltava piste A ja peilaa se suoran y=x suhteen
- lisää molempien funktioiden kuvaajille tangentit edellisen kohdan pisteisiin ja laske tangenttien kulmakertoimet *Kulmakerroin*-työvälineellä



Havainnollistuksesta ilmenee symmetrisyys: tangenttien kulmakertoimet ovat toistensa käänteislukuja.

Tehtävä 8 Derivaattafunktio

Luo havainnollistus, joka havainnollistaa derivaattafunktion käsitettä sekä potenssifunktion derivointisääntöä.

- luo kokonaislukuliuku `n=1,2,3,4` ja syötä potenssifunktio `f(x)=x^n`
- aseta liu'un arvoksi `n=2`
- lisää x-akselille piste A ja funktion kuvaajalle piste `P=(x(A),f(A))`
- lisää funktion kuvaajalle tangentti pisteeseen *P* ja ota tangentin kulmakerroin näkyville
- tarkista algebraikkunasta mikä kulmakertoimen nimeksi tuli
- lisää ABC-teksti, johon upotat derivaatan arvon

Rinnakkaiset piirtoalueet

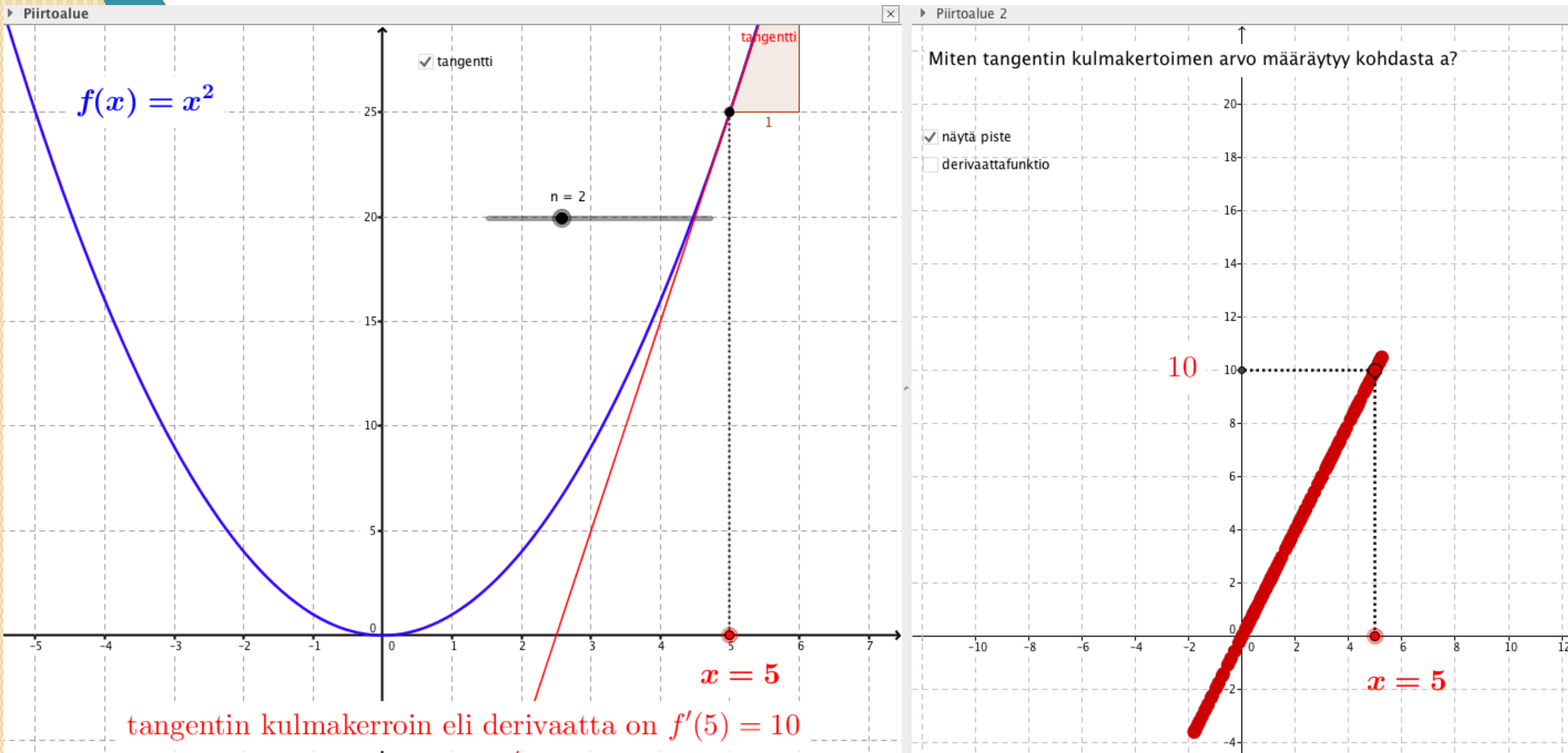
- valitse *Näytä – Piirtoalue 2*
  saat peruspiirtoalueen rinnalle toisen piirtoalueen
- aktiivisena on se piirtoalueista, jonka otsikko on **lihavoituna**; klikkaamalla piirtoalueen otsikkoa voit vaihtaa aktiivisena olevaa piirtoaluetta
- syöttökentän kautta määriteltävät objektit tulevat aktiivisena olevalle piirtoalueelle
- objekti voidaan siirtää piirtoalueelta toiselle *Ominaisuudet*-ikkunan *Lisäasetukset*-välilehdellä olevalla valinnalla

Tehtävä 8 jatkuu

- ota piste A näkyviin myös piirtoalueelle 2
- luo piirtoalueelle 2 piste B, jolla on sama x-koordinaatti kuin pisteellä A ja jonka y-koordinaatti on tangentin kulmakerroin – siis derivaatan arvo: `B=(x(A),”nimi”)` kohtaan “nimi” tulee tangentin kulmakertoimen nimi
- ota pisteelle B jälki käyttöön

Kun liikutat pistettä A x-akselilla piirtoalueella 1, niin piirtoalueelle 2 piirtyy derivaattafunktion kuvaaja.

Derivaattafunktio ja potenssin derivointisääntö



TEHTÄVÄ 11

suorakulmion pinta-alan riippuvuus sivun pituudesta

Tutki, miten suorakulmion pinta-ala riippuu sivun (kannan tai korkeuden) pituudesta tilanteessa, jossa piiri on vakio (p=16)

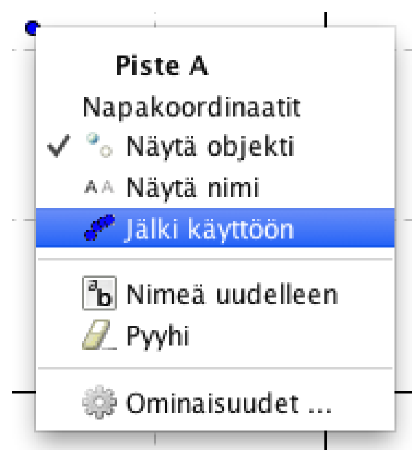
- aloita konstruoimalla suorakulmio, jonka sivunpituutta (kantaa tai korkeutta) voidaan muutella yhtä kärkipistettä siirtelemällä kuitenkin niin, että **piiri pysyy vakiona: piiri=16** – tämä vaatii hieman näpertelyä
- voit hyödyntää sovelmaa, jonka teit ensimmäisellä työviikolla (harjoitukset 1 / tehtävä 8)
- algebraikkunassa voidaan tarkkailla suorakulmion pinta-alan muutoksia kun sivun pituutta muutellaan

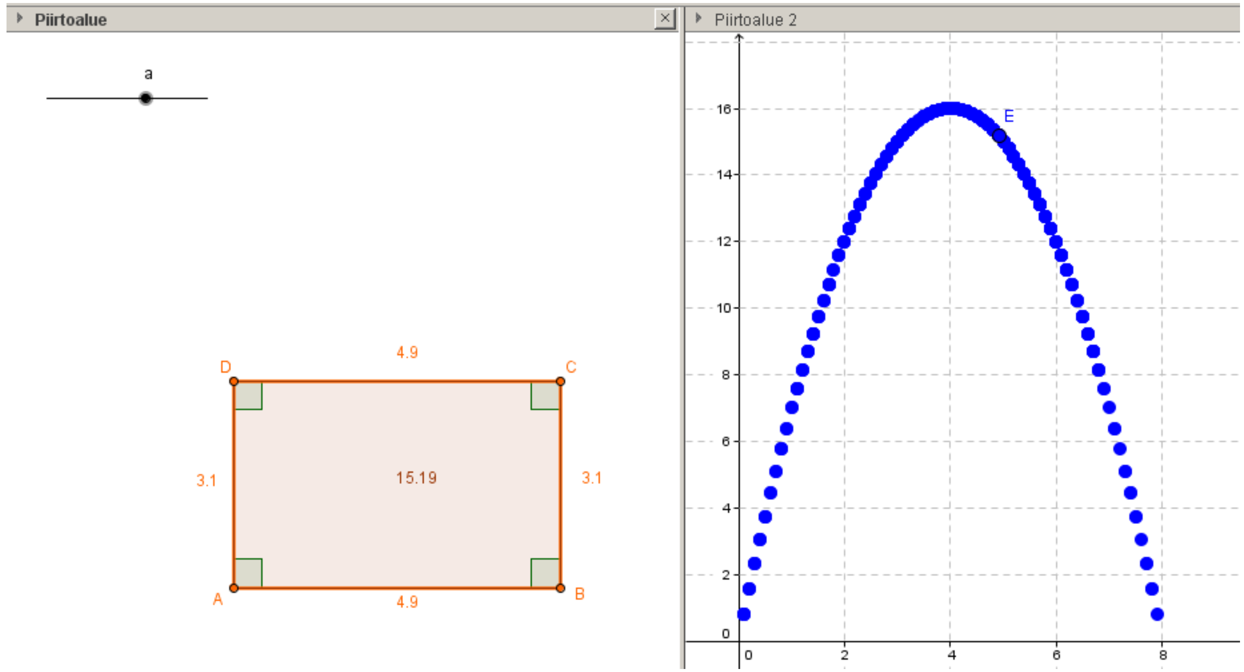
Hyödynnä rinnakkaisia piirtoalueita sekä *Jälki*-toimintoa riippuvuuden tarkempaan analysoimiseen

Ohjeita seuraavalla sivulla!

Riippuvuuden analysoiminen Piirtoalueella 2

- Luo Piirtoalueelle 2 piste, jonka x-koordinaattina on **suorakulmion sivun pituus** (kanta tai korkeus) ja y-koordinaattina on **suorakulmion pinta-ala**
  - syöttökentän kautta annettava komento: (kannan/korkeuden nimi,suorakulmion nimi)
  - tarkista nimet algebraikkunasta!
- Ota pisteelle *Jälki* käyttöön
  - hiiren oikealla pisteen päällä: valinta *Jälki käyttöön*





Piirtoalueessa 2 havainnollistuu suorakulmion pinta-alan riippuvuus sen sivun (kuvassa kannan) pituudesta.

Kysymyksiä:

- mikä on pinta-alan suurin mahdollinen arvo?
- mitkä ovat suorakulmion mitat silloin, kun pinta-ala on suurimmillaan?
- miten suorakulmion pinta-ala riippuu sen kannan pituudesta?

Tehtävät 12-13

tasakylkisen kolmion pinta-alan riippuvuus kolmion muodosta

Aloita konstruoimalla tasakylkinen kolmio, jonka **kyljen pituus on 5**.
Tapoja on useita ja riippuu konstruktiosta, miten kolmion mitat ovat muunneltavissa. Opettajana kannattaa miettiä miten konstruktio kannattaa rakentaa, jotta se olisi opetuksen kannalta mahdollisimman havainnollinen. Oppilaiden työskentelyssä lopputulosta ei niinkään voi ennakoida.

Tässä kaksi erilaista konstruktiota – valitse niistä toinen:

<u>Konstruktio 1: kolmion kannan pituus säädeltävissä</u>

- Lisää ensin piste origoon ja kiinnitä se. Origosta tulee kannan vasen päätepiste. Sitten on hyödyllistä huomata, että kannan pituus vaihtelee välillä 0…10. Luo kantaa varten apujana *Jana[(0,0),(10,0)]* ja janalle liikuteltava piste, josta tulee kannan oikea päätepiste.
- Piirrä kannan päätepisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat 5: ympyröiden leikkauspiste on kolmion kärkipiste.
- Piilota apujana ja ympyrät, ja rakenna kolmio *Monikulmio*-työvälineellä.

Konstruktio 2: kolmion korkeus säädeltävissä

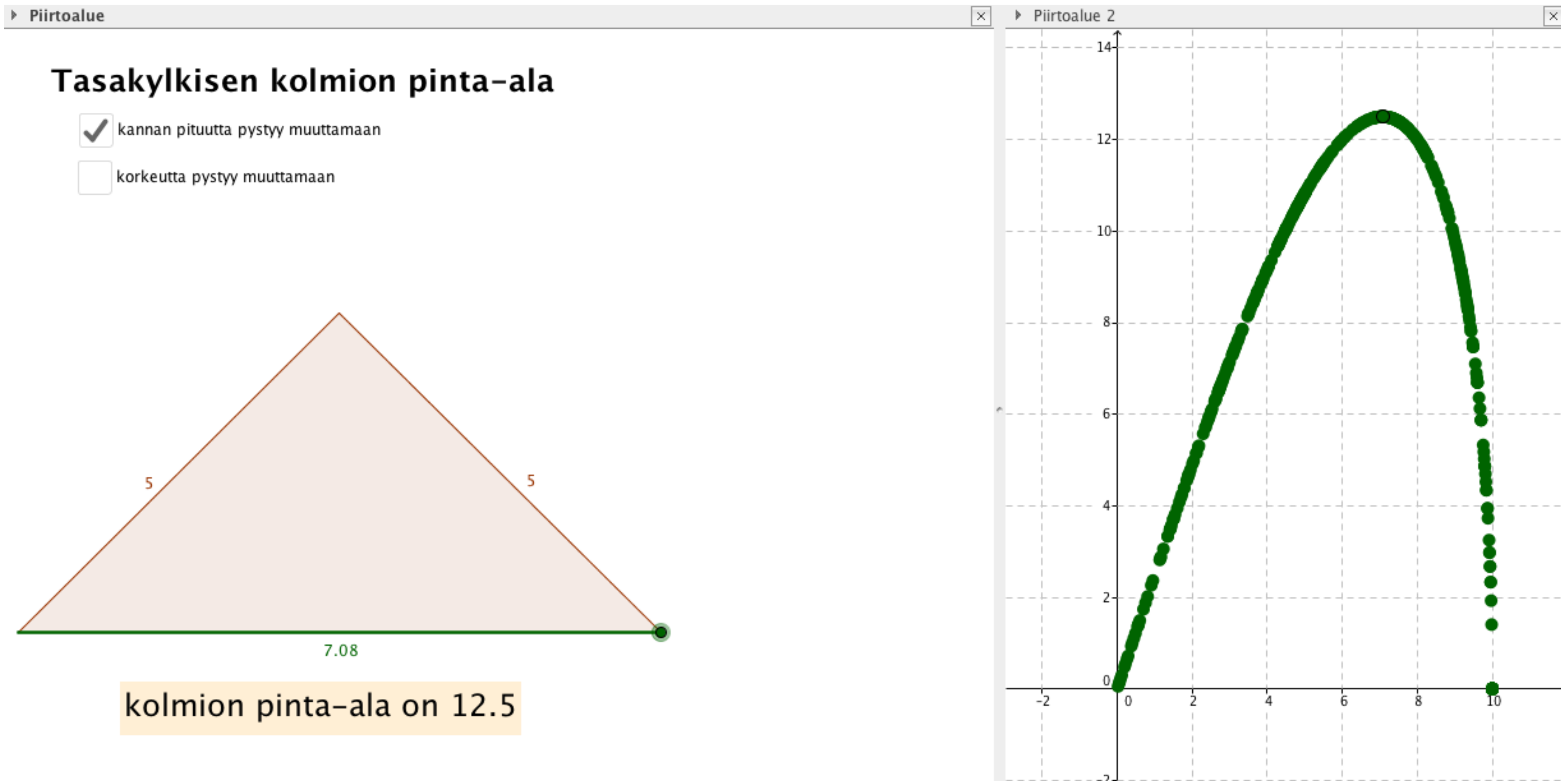
- Lisää ensin piste origoon ja kiinnitä se. Origosta tulee kannan keskipiste. Sitten on hyödyllistä huomata, että kolmion korkeus vaihtelee välillä 0…5. Luo kantaa varten apujana *Jana[(0,0),(0,5)]* ja janalle liikuteltava piste, josta tulee kolmion kärkipiste.
- Piirrä kärkipiste keskipisteenä ympyrä, jonka säde on 5: ympyrän ja x-akselin leikkauspisteet ovat kolmion kannan päätepisteet.
- Piilota apujana ja ympyrä, ja rakenna kolmio *Monikulmio*-työvälineellä.

Kun kolmion yhtä pistettä (kannan päätepistettä tai kärkipistettä) liikutetaan, kolmion kannan pituus ja korkeus muuttuvat, ja samalla muuttuu kolmion pinta-ala.

- Ota kolmion pinta-ala näkyville ABC-tekstiin. Tarkastele mikä on kolmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Tehtävä 13: Tutki tarkemmin, miten tasakylkisen kolmion pinta-ala riippuu sen kannan pituudesta tai korkeudesta. Valitse tutkittavaksi jompi kumpi tilanne (eli konstruktio 1 tai konstruktio 2).

- Ota esille piirtoalue 2.
- Lisää piirtoalueelle 2 piste, jonka x-koordinaattina on valitsemasi pituus (kanta tai korkeus) ja y-koordinaattina on kolmion pinta-ala.
- Ota pisteelle jälki käyttöön. Muuta kolmion mittoja kärkipistettä liikuttamalla ja seuraa muutoksia piirtoalueella 2.


Piirtoalue
Tasakylkisen kolmion pinta-ala
kannan pituutta pystyy muuttamaan
korkeutta pystyy muuttamaan
5
5
7.08
kolmion pinta-ala on 12.5
Piirtoalue 2
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10

Tehtävä 16 Eksponenttifunktiot ja Neperin luku

Havainnollista eksponenttifunktioita ja niihin liittyvää tärkeää Neperin lukua:

- Luo positiivinen *liuku k* alarajalta 0.1 ylärajalle 5, animaatioaskeleena 0.1
- Syötä syöttökentän kautta eksponenttifunktio `f(x)=k^x`
- Lisää kuvaajalle piste (0,1) ja siihen tangentti. Ota tangentin kulmakerroin esille.
- Liukukytkintä muuttelemalla huomataan, että kantalukujen 2,7 ja 2,8 välissä tangentin kulmakerroin (ja siis derivaatta kohdassa x=0) vaihtuu ykköstä pienemmästä ykköstä suuremmaksi.

- Lähde haarukoimaan tarkemmin, millä kantaluvulla on se ominaisuus, että tangentin kulmakerroin on tasan 1:
  - Lisää tekstikenttä ja linkitä se kantalukuun k: nyt kantaluvun arvoksi voidaan tekstikentän kautta asettaa mikä vaan luku (vaihtoehtoisesti voidaan tietysti pienentää liukukytkimen askelväliä, mutta tekstikenttä on joustavampi)