

LASKENTATAULUKKO

- GeoGebran laskentataulukko toimii samaan tapaan kuin muut taulukkolaskentaohjelmat, esim. *Excel*, eli soluihin voidaan kirjoittaa **laskukaavoja** ja kaavoihin **soluviittauksia**.
 - laskentataulukon saa esille valitsemalla *Näytä – Laskentataulukko*
 - kun laskentataulukko on auki, *Mutteri*-kuvakkeesta voidaan muuttaa asetuksia: mm. alkaako laskukaava = –merkillä (kuten taulukkolaskennassa on tapana)
 - soluun viitataan sarakekirjaimella ja rivinumerolla, kaavojen ”solulukitus” tehdään \$-merkillä
 - laskukaava voidaan kopioida sarakkeessa alaspäin (tai rivissä eteenpäin)



Esimerkki soluviittausten perusperiaate

- Tallenna A-sarakkeeseen riveille 1-15 luonnolliset luvut 1,2,...,15
 - huomaa: kaksi ensimmäistä lukua riittää, loput saadaan vetämällä niiden “solukahvasta” alaspäin

Tallenna soluun B1 laskukaava:

$$=A1^2 \text{ (suhteellinen viittaus soluun A1, ei lukittu)}$$

- kopioi kaavaa alaspäin soluihin B2-B15

B-sarakkeeseen tulevat A-sarakkeen lukujen neliöt.

Tallenna soluun D1 luku 5

Tallenna soluun C1 laskukaava:

$$=B1 * \$D\$1 \text{ (sisältää lukitun viittauksen soluun D1)}$$

- kopioi kaavaa alaspäin soluihin C2-C15

C-sarakkeeseen tulevat B-sarakkeen luvut viidellä kerroituina.

Esimerkki

soluviittausten perusperiaate – jatkuu

- Tallenna soluun C16 laskukaava:

=Keskiarvo(C1:C15)

- huomaa: kun olet kirjoittanut komennon ja ensimmäisen kaarisulun, voit maalata hiirellä sen solualueen, jonka soluista keskiarvo lasketaan

Soluun C16 tulee siis C-sarakkeen lukujen keskiarvo.

Laske soluun C17 vielä samojen lukujen keskihajonta:

=Keskihajonta(C1:C15)



f_x -kuvakkeesta saat näkyville syöttökentän, josta näkyy soluihin talletetut laskukaavat

Tarkemmat soluviittaushjeet:

- <http://excelohjeet.com/solujen-soluviittausten-lukitus/>
- <http://appro.mit.jyu.fi/doc/tiedonhallinta/taulukkolaskenta/index4.html>



Tehtävä I

funktion arvojen taulukointi

Aloita työskentely piirtoalueelta.

- syötä jonkin funktio: $f(x) = \dots$
- lisää syöttökentän kautta piste $P = (a, f(a))$ funktion kuvaajalle
 - huom. GeoGebra luo automaattisesti liukukyttimeen parametrille a
 - muuta liukukyttimeen askelväliksi 1
 - aseta liukukyttimeen arvoksi minimiarvo -5

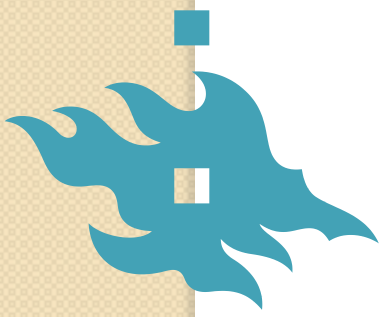
- ota laskentataulukko esille

Funktion arvot voidaan tallentaa kahdella tavalla:

Tapa I:

- napauta laskentataulukon solua A1
- napauta liukukyttimeen kohdalla hiiren oikeata: *Vie taulukkoon –valinta*; rivirajoitus kannattaa määritellä!
- liukukyttimeen arvoa muuttamalla *muuttujan arvot* tallentuvat laskentataulukkoon A-sarakkeeseen
- laske funktion arvot B-sarakkeeseen: lisää soluun B2 laskukaava $=f(A2)$ kopioi kaavaa alaspäin
- maalaa laskentataulukon data, klikkaa hiiren oikealla: *Luo - Taulu*

	● II	A
1		a
2		-4
3		-3
4		-2
5		-1
6		0
7		1
8		2
9		3
10		4
11		5



Tehtävä I

funktion arvojen taulukointi

Funktion arvot voidaan tallentaa kahdella tavalla:

Tapa II:

- napauta laskentataulukon solua A1
- napauta pisteen P kohdalla hiiren oikeata: *Vie taulukkoon* -valinta; rivirajoitus kannattaa määritellä!

	●II A	●II B
1	x(P)	y(P)
2	-4	-2
3	-3	-1
4	-2	0
5	-1	1
6	0	2
7	1	3
8	2	4
9	3	5
10	4	6
11	5	7

- liukukytkimen arvoa muuttamalla *pisteen P koordinaatit* tallentuvat laskentataulukkoon A-sarakkeeseen (muuttuja) ja B-sarakkeeseen (funktion arvot)
- maalaa laskentataulukon data, klikkaa hiiren oikealla: *Luo - Taulu*

I. MITTAUSTULOKSET ja MALLINTAMINEN (riippuvuuden tutkiminen)

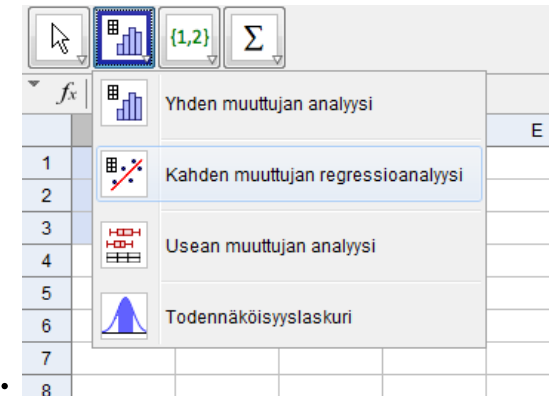
- Talleta mittaustulokset laskentataulukkoon
- Maalaa mittaustulokset hiirellä, valitse työväline *Kahden muuttujan regressioanalyysi*

Mittausaineistoon voidaan sovittaa erilaisia malleja:

- malli valitaan ikkunan alalaidan alavetovalikosta
- ikkunan ylälaidassa on viisi ikonia, mistä saadaan näkyville mm tilastot ja data sekä muutettua muuttujien suhdetta



- kuva viedään piirtoalueelle valitsemalla hiiren oikea ja *Kopioi piirtoalueelle*
- piirtoalueella koordinaatiston asetuksia voi viimeistellä (esim. nimet akseleille, otsikko, jne)



Tehtävä 2

auriongonkukan kasvun kuvailu

Auringonkukka (Helianthus annuus) on yksivuotinen kasvi, jonka varren pituus voi aurinkoisina kesinä hyvissä kasvuolosuhteissa Suomessakin ylittää jopa viisi metriä.

Auringonkukan siemen istutettiin toukokuun alussa istutusruukkuun. Taimi siirrettiin kesäkuun ensimmäisenä päivänä istutusruukusta kukkapenkkiin, ja sen pituudeksi mitattiin 20 cm. Kukan kasvua seurattiin 12 viikkoa aina elokuun puoliväliin saakka, jolloin kukka oli saavuttanut maksimipituutensa. Mittaustulokset on esitetty taulukossa seuraavalla sivulla.



Pyri kuvaamaan kukan kasvua:

- a) Tallenna mittaustulokset laskentataulukkoon.
- b) Lisää kolmanteen sarakkeeseen laskukaava, joka laskee kukan viikkokasvua senttimetreinä.
- c) Lisää neljänteen sarakkeeseen laskukaava, joka laskee kukan viikkokasvua prosentteina.
- d) Miten kuvailisit kukan kasvua? Entä kasvunopeutta?
- e) Selvitä malli (funktio), joka parhaiten kuvaa auringonkukan kasvua.

kulunut aika 1.6. lukien (viikkoina)	aurionkukan korkeus (cm)
1.6.	20
1 viikon lopussa	26
2	32
3	44
4	57
5	74
6	97
7	124
8	164
9	212
10	276
11	359
12	466

Tehtävä 3

henkilöauton polttoaineen kulutuksen riippuvuus nopeudesta

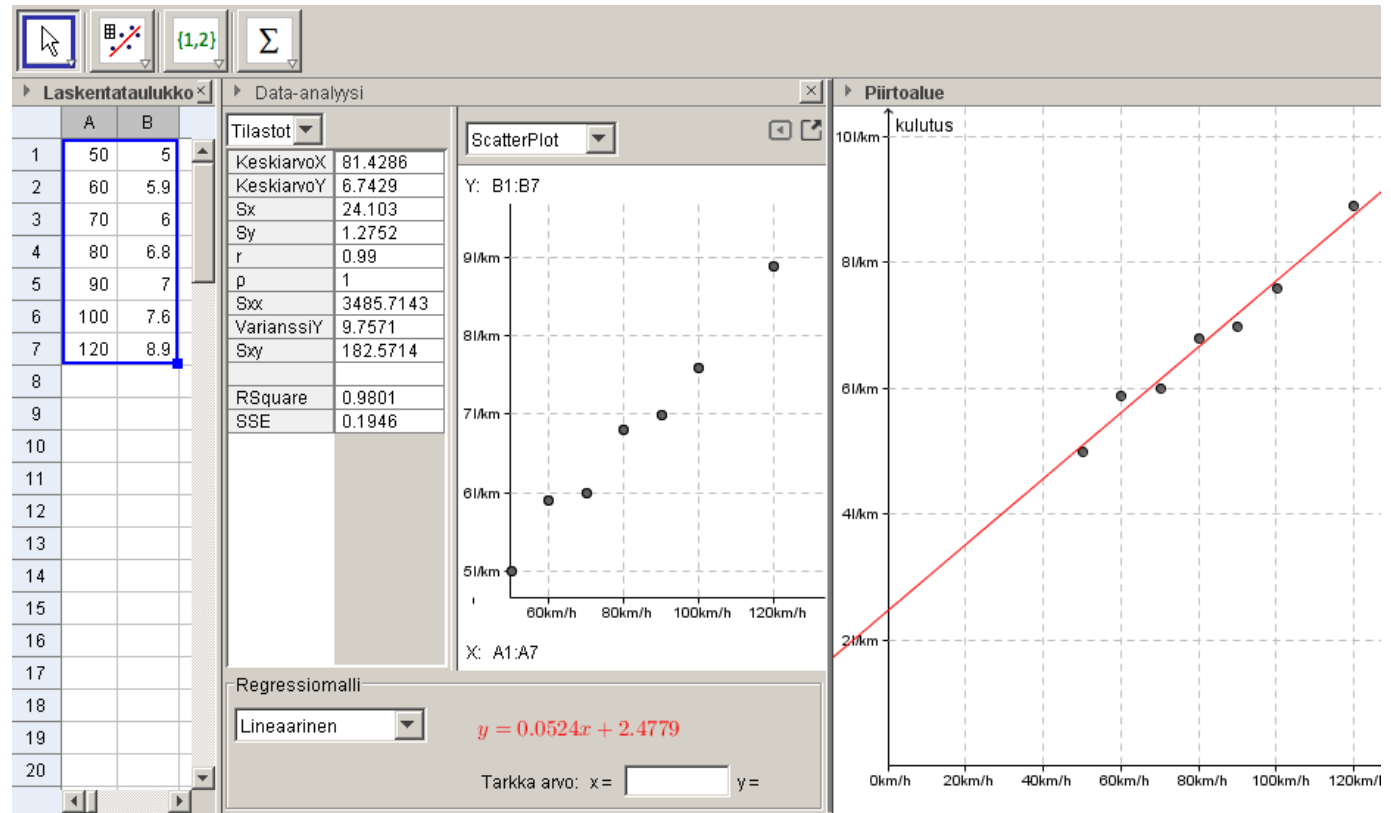
Huom. GeoGebrassa desimaaliosa erotetaan pisteellä – ei pilkulla!

Henkilöauton polttoaineen kulutus testitilanteessa eri nopeuksilla on taulukon mukainen:

- talleta mittaustulokset laskentataulukkoon
- piirrä yhteisjakaumasta hajontakuva
- vaikuttaako riippuvuus lineaariselta?
- määritä regressiosuoran yhtälö
- määritä korrelaatiokerroin
- siirrä tiedot Word-asiakirjaan ja tulkitse riippuvuutta

- tehtävään liittyviä kysymyksiä on seuraavalla sivulla

Nopeus (km/h)	Kulutus (l/100km)
50	5,0
60	5,9
70	6,0
80	6,8
90	7,0
100	7,6
120	8,9



- Mallin mukaan, mikä on polttoaineen kulutus kun nopeus on 75 km/h?
- Entä kun nopeus on 140 km/h?
- Mitä selityksiä keksit sille, että polttoaineen suhteellinen kulutus kasvaa nopeuden kasvaessa?

Tehtävä 4

planeetan etäisyyden ja kiertoaajan välinen yhteys

Saksalainen tähtitieteilijä *Johannes Kepler* (1571-1630) keksi planeetan etäisyyden ja kiertoaajan välisen yhteyden. Oheisessa taulukossa on viiden Aurinkoa lähinnä olevan planeetan kiertoaika vuosina ja etäisyys astronomisen yksikön avulla lausuttuna.

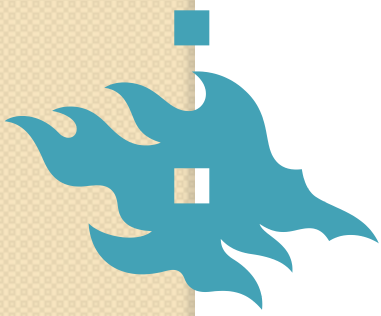
planeetta	kiertoaika (x) vuosina	etäisyys (y) astronom. yks.
Merkurius	0,241	0,387
Venus	0,615	0,723
Maa	1,0	1,0
Mars	1,881	1,523
Jupiter	11,861	5,203

Tehtävä 4

planeetan etäisyyden ja kiertoaajan välinen yhteys

Huom. GeoGebrassa desimaaliosa erotetaan pisteellä – ei pilkulla!

- talleta mittaustulokset laskentataulukkoon: kiertoaajat x A-sarakkeeseen ja etäisyydet y viereiseen B-sarakkeeseen
- tutki kiertoaajan ja etäisyyden välistä riippuvuutta ja etsi sopivin riippuvuutta kuvaava malli: mikä on Keplerin kaava etäisyydelle y kiertoaajan x avulla lausuttuna?
- Saturnuksen kiertoaika on $x=29,457$ vuotta. Mikä on sen etäisyys Auringosta (astronomisina yksikköinä)?



Tehtävän 4 jatkotehtävä

- Lisää laskentataulukkoon laskukaavat, jotka laskevat kiertoajan x kuutiojuuren ja etäisyyden y neliöjuuren:
 - lisää soluun C1 kaava
`=cbrt (A1)` kopioi kaavaa alaspäin soluihin C2-C5
 - lisää soluun D1 kaava
`=sqrt (B1)` kopioi kaavaa alaspäin soluihin D2-D5

Mitä huomaat? Osaatko tämän perusteella päätellä Keplerin kaavan etäisyydelle y kiertoajan x funktiona?

2. TILASTOT

GeoGebrassa on monipuoliset työvälineet tilastoaineistojen käsittelyyn:

GeoGebrassa on mahdollista esittää (melkein?) kaikki koulumatematiikan tilastotieteen keskeiset käsitteet

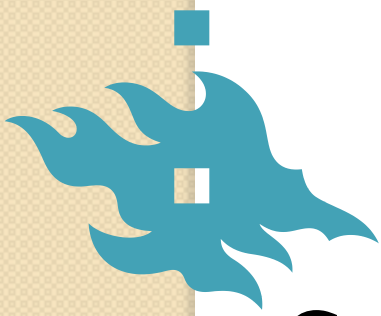
- tilastollinen aineisto voidaan tallentaa piirtoalueen syöttökentän kautta listana tai laskentataulukkoon
- tilastoja on luontevinta tarkastella laskentataulukossa



Yhden tilastollisen muuttujan tarkastelu kuvat ja tunnusluvut

Yhden muuttujan (esim. ikä, pituus, arvosanat) jakaumaa voidaan kuvata GeoGebran avulla laskemalla **tunnuslukuja** sekä piirtämällä jakaumaa havainnollistavia **kuvia**:

- **keskiluvut**: keskiarvo, keskihajonta, moodi
- **järjestysluvut**: minimi, maksimi, mediaani, kvartiilit
- **pylväskaavio**
- **histogrammi**
- **laatikkokuva** (vaihteluväli ja kvartaaliväli)



Tilastoaineiston tallentaminen

- GeoGebra on yhteensopiva Excelin kanssa:
Copy – Paste toimii!

Tilastoaineiston tallentaminen:

- raakadata (kaikki havainnot listattuna)
 - joko syöttökentän kautta listakomennolla tai laskentataulukkoon
- data (havaintoarvot) + frekvenssit
 - laskentataulukkoon
- luokat + frekvenssit
 - laskentataulukkoon

Tilastoaineiston tallentaminen I/2

Raakadata:

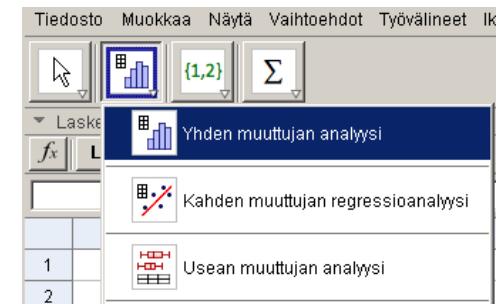
- talleta aineisto laskentataulukon sarakkeeseen, maalaa, valitse työväline *Yhden muuttujan analyysi*
- valitse: *Analysoi*

Data+frekvenssit:

- talleta data (muuttujan arvot) laskentataulukon sarakkeeseen
- talleta frekvenssit toiseen sarakkeeseen
- maalaa data, valitse työväline *Yhden muuttujan analyysi*
- klikkaa *mutteria* – *Data ja frekvenssi*
- maalaa frekvenssisarake, klikkaa frekvenssi-sarakkeen ”kättä”
- valitse: *Analysoi*

Luokat+frekvenssit:

- talleta frekvenssit laskentataulukon sarakkeeseen
- maalaa data, valitse työväline *Yhden muuttujan analyysi*
- klikkaa *mutteria* – *Luokat ja frekvenssit*
- klikkaa frekvenssi-sarakkeen ”kättä” → frekvenssit siirtyvät *Aineiston lähde* – ikkunaan
- aseta luokkien alku ja luokkaväli (valitettavasti ainoastaan tasaväliset luokat sallitaan)
- valitse: *Analysoi*



Data-analyysi-ikkuna tunnusluvut ja kuvat

Kun olet painanut *Analysoi*, aukeaa **Data-analyysi-ikkuna**:
ikkunassa on yhteenveto aineiston analyysistä tunnuslukuineen ja kuvineen

➤ **tunnusluvut** saat esille *Tilastot*-kuvakkeesta

➤ **kuva** saat vaihdetuksi alasettovalikosta

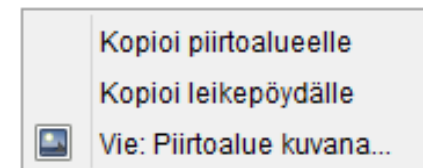
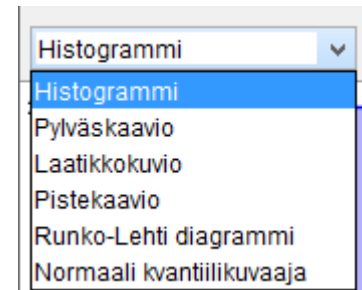
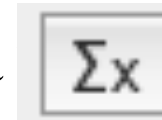
➤ **oikealla reunassa** on pieni play-nappula, josta saa lisäasetuksia, mm:

➤ frekvenssitaulukko näkyviin

➤ histogrammin luokkavälit

➤ histogrammin tyyppi (kumulatiivinen, suhteellinen jne)

➤ painamalla hiiren oikealla saat kopioituksi kuvat joko piirtoalueelle tai leikepöydälle (ja sitä kautta esim Wordiin)



Tilastoaineiston tallentaminen ja tunnuslukujen laskeminen 2/2

Yhden muuttujan tilastollisia tunnuslukuja voidaan laskea myös syöttökentän kautta:

- talleta aineisto piirtoalueen syöttökentän kautta listana: {aaltosulkujen sisällä, pilkuilla eroteltuna}

vaihtoehto:

- talleta aineisto laskentataulukon sarakkeeseen, maalaa, valitse työväline *Luo lista* → aineisto on nyt tallennettuna listaksi

Kun aineisto on listana...

- tunnuslukujen laskemiseen on piirtoalueen syöttökentän kautta annettavat komennot:

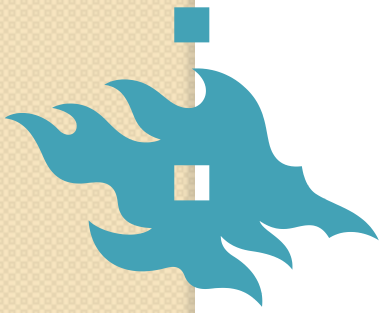
Keskiarvo [...] Keskihajonta [...]

Mediaani [...] Tyyppiarvo [...]

Alakvartiili [...] Yläkvartiili [...]

hakasulkujen sisällä ilmoitetaan listan nimi: näet sen algebraikkunasta

Syöttökentän etu: tunnusluvut saadaan piirtoalueelle näkyviin upottamalla ne ABC-tekstiin; Data-analyysi-ikkunassa ne ovat omana taulukkonaan



Tehtävä 5

MAA4-kurssin pistejakauma

- Erään MAA4-kurssin välitestin tulokset ($n=29$) olivat:
14, 12, 14, 13, 13, 11, 10, 9, 14, 11, 11, 11, 4, 9, 13, 6, 10, 13, 6, 6,
11, 14, 7, 8, 13, 13, 7, 11, 10.
 - a) kirjaa pisteet laskentataulukkoon, tee niistä lista (työväline!)
 - b) kuvaa jakaumaa pylväsdiagrammilla, ota esille myös frekvenssitaulukko
 - c) kopioi diagrammi ja taulukko piirtoalueelle
 - d) lisää otsikko: ”Välitestin tulokset” (tmv)
 - e) muuta akseleille nimet: ”pistemäärä” ja ”lukumäärä” (tmv)
 - f) laske syöttökentän kautta jakauman tunnusluvut: keskiarvo, keskihajonta ja mediaani; ota ne näkyviin piirtoalueelle (ABC-tekstiin)

Tehtävä 6

Koepisteet

Pidit matematiikan kokeen 32 opiskelijalle.

Määritä taulukoitujen pisteiden ja GeoGebran avulla koepisteiden:

➤ vaihteluväli (min-max)

➤ keskiarvo

➤ keskihajonta

➤ mediaani

Havainnollista

pistejakaumaa

histogrammilla ja

laatikkokuvalla.

tunniste	pisteet	tunniste	pisteet	tunniste	pisteet
1	17	12	23	23	10
2	8	13	7	24	14
3	4	14	13	25	15
4	13	15	7	26	24
5	12	16	14	27	21
6	14	17	15	28	9
7	16	18	11	29	17
8	12	19	20	30	14
9	24	20	8	31	18
10	13	21	6	32	16
11	19	22	3		

Tehtävä 7

koululaisten koulumatkojen jakauma

**Näkymät – Taulukkolaskenta
tai**

Näytä – Laskentataulukko

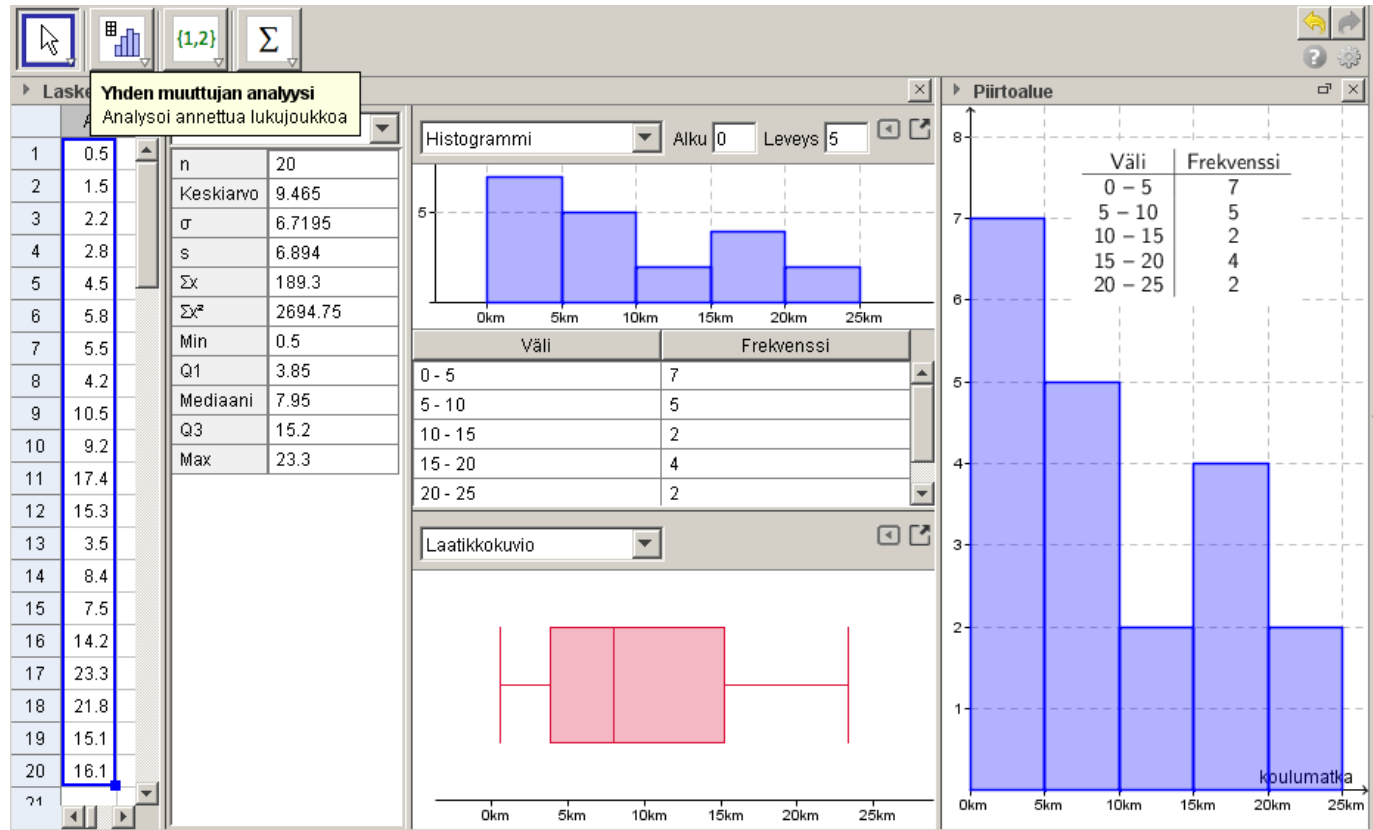
Oppilaiden koulumatkojen (n=20)
pituudet on kirjattu taulukkoon:

Huom. GeoGebrassa desimaaliosa erotetaan
pisteellä – ei pilkulla!

koulumatkan pituus (km)	koulumatkan pituus (km)
0,5	17,4
1,5	15,3
2,2	3,5
2,8	8,4
4,5	7,5
5,8	14,2
5,5	23,3
4,2	21,8
10,5	15,1
9,2	16,1

- Kirjaa aineisto laskentataulukkoon.
- Piirrä jakaumasta histogrammi (valitse sopiva luokkaväli) sekä laatikkokuva
- Määritä koulumatkojen keskiarvo, keskihajonta ja mediaani
- siirrä tiedot ja kuvat Word-asiakirjaan

➤ tehtävään liittyviä kysymyksiä on seuraavalla sivulla



- Muuta luokkavälin pituudeksi 10 km. Kuinka monen oppilaan koulumatkan pituus on alle 10 km? Mikä on niiden oppilaiden suhteellinen osuus, joilla koulumatkan pituus on yli 20 km?
- Mikä on koulumatkan kvartiiliväli ja mitä tämä väli meille kertoo?

Tehtävä 8

Kurssin osallistujien ikäjakauma (N=18)

- Erään loppusyksyn 2014 GeoGebra-täydennyskoulutuskurssin osallistujien syntymävuodet olivat:

1952, 1968, 1955, 1981, 1975, 1956, 1986, 1957, 1959, 1962, 1964, 1965, 1968, 1970, 1972, 1974, 1975, 1991.

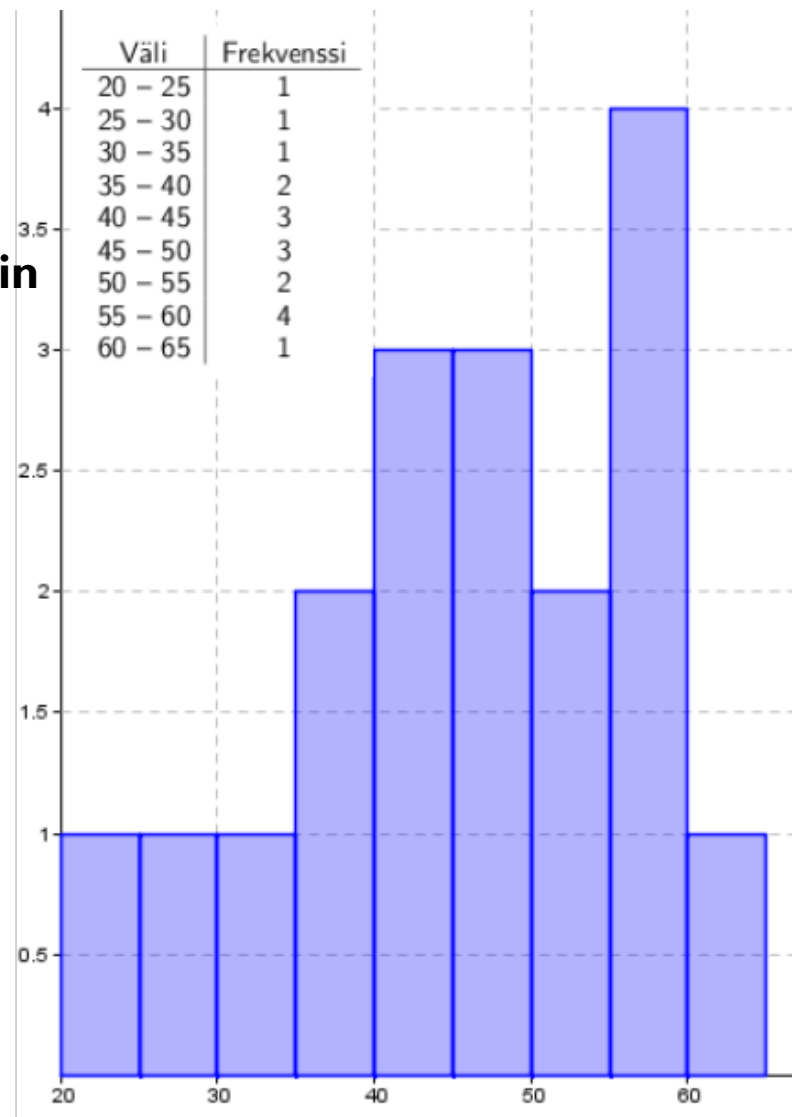
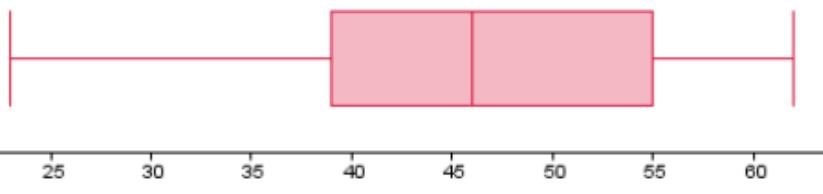
- a) Kirjaa syntymävuodet laskentataulukon A-sarakkeeseen.
- b) Laadi B-sarakkeeseen laskukaava, joka laskee osallistujan iän syntymävuodesta. (Voit olettaa, että kaikki osallistujat olivat jo täyttäneet vuosia kurssin alkaessa.)
- c) Selvitä ikämuuttujan tunnusluvut: keskiarvo, keskihajonta, mediaani, jne.
- d) Kuvaa ikämuuttujan jakaumaa histogrammilla (valitse luokkaväliksi esimerkiksi 5 vuotta tai 10 vuotta).
- e) Havainnollista iän jakaumaa myös laatikkokuvalla.



GeoGebra-täydennyskoulutuskurssin osallistujien ikäjakauma

keskiarvo 45.67
keskihajonta 10.56

min=23
q1=39
mediaani=46
q3=55
max=62



Tehtävä 9

Luokitellun aineiston analysoiminen

Oheisessa taulukossa on erään koulun oppilaiden pituusjakauma.

- tee taulukoidusta aineistosta histogrammi
- määritä pituuden keskiarvo ja keskihajonta
 - huomaa: luokitellun aineiston analysoimiseen on vähemmän vaihtoehtoja kuin ei-luokitellun aineiston analysoimiseen
- kopioi histogrammi piirtoalueelle
- tehtävä jatkuu seuraavalla sivulla!

Height (cm)	Frequency
140-150	15
150-160	41
160-170	67
170-180	72
180-190	65
190-200	34
200-210	3

Aineiston lähde

Yhden muuttujan analyysi

Luokat	A1:A7
140.0 - 150.0	15
150.0 - 160.0	41
160.0 - 170.0	67
170.0 - 180.0	72
180.0 - 190.0	65
190.0 - 200.0	34

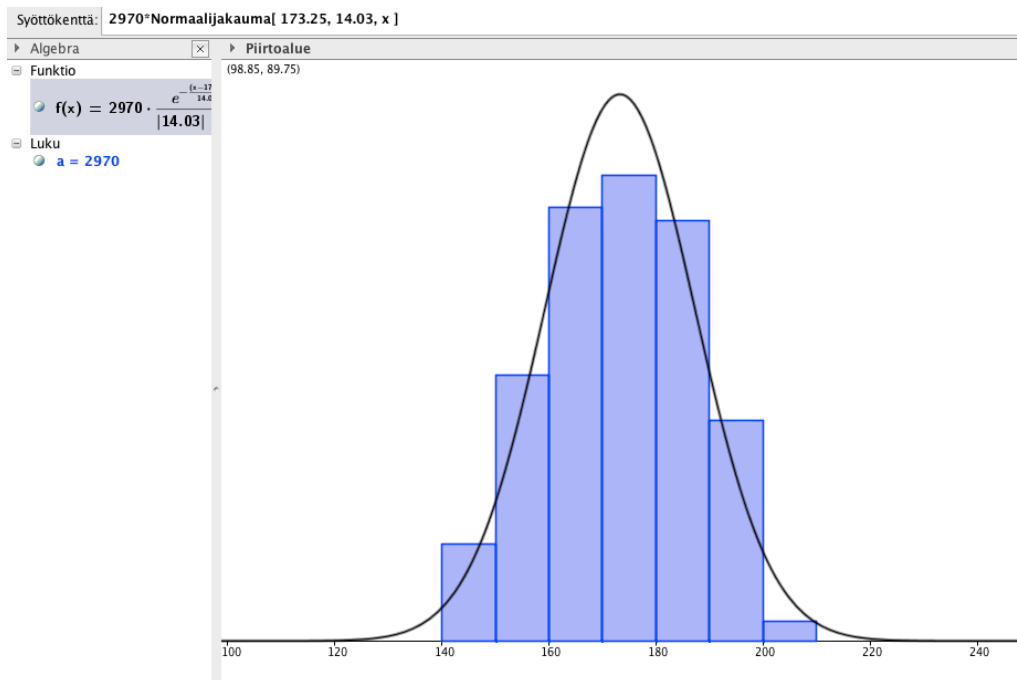
Alku: 140 Leveys: 10

Numero
Teksti
Raakadata
Data ja frekvenssi
Luokat ja frekvenssi
Käytä otsaketta otsikkona

Peruuta Analysoi

Tutki, miten tarkasti pituusjakauma noudattaa normaalijakaumaa:

- ▶ piirtoalueen syöttökentän komento
Normaalijakauma[odotusarvo, keskihajonta, x]
odotusarvo ja hajonta ovat siis jakauman tunnusluvut
Normaalijakauma-komennolla saat **normitetun** normaalijakauman, eli tiheysfunktion ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala = 1
- ▶ normitus täytyy muuttaa vastaamaan tilannetta: katso algebraikkunasta pituuden histogrammin pinta-alan arvo ja kerro normaalijakauma sillä



3. GeoGebran todennäköisyyslaskuri

GeoGebran todennäköisyyslaskuria voidaan käyttää taulukkokirjojen ja laskimien tapaan.

**Näkymät – Todennäköisyys
tai
Laskentataulukon työväline**

Laskurilla havainnollistuvat myös monet todennäköisyyteen liittyvät käsitteet.

Laskurista löytyvät kaikki lukiomatematiikassa käsiteltävät todennäköisyysjakaumat, kuten binomijakauma ja normaalijakauma sekä Poisson-jakauma.

