

Nimi: \_\_\_\_\_

**Helsingin yliopisto**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos (opettajankoulutus)**  
**GeoGebra opetuksessa**  
**Kevät 2015**  
**Viikko 12 (ma 16.3. ja ke 18.3.)**

## Työviikko 2 Funktion käsite ja funktiotyypit

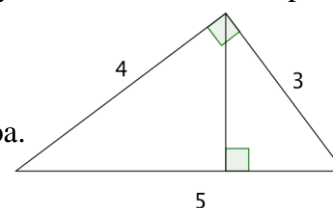
*Ohjeet harjoitustehtävien tekemiseen ja palauttamiseen:*

- \* Käytä tehtävien ratkaisemiseen GeoGebraa.
- \* Kun olet ratkaissut tehtävän – ja olet valmis esittämään sen ryhmälle, merkitse tehtävän vasemmalla puolella olevaan ruutuun .
- \* Jos ratkaisit tehtävästä osan (esimerkiksi puolet alakohdistista) tai et saanut ratkaisua loppuun saakka, merkitse ruutuun .
- \* Laske lopuksi tekemiesi tehtävien kokonaismäärä ja merkitse pisteet ensimmäiseen ruutuun. Puolikkaista tehtävistä saat puolikkaita pisteitä.
- \* Aikaa tehtävien ratkaisemiseen on viikko: palauta tämä tehtäväpaperi viimeistään ensi viikon maanantaina ryhmätapaamisen alkaessa.
- \* Ei ole välttämätöntä tallentaa jokaisen tehtävän työtiedostoa (ellei tehtävänannossa nimenomaisesti tätä pyydetä). Muistathan kuitenkin, että pisteen merkitseminen edellyttää, että olet valmistautunut esittämään ratkaisun ryhmälle.

**Tällä työviikolla ratkaistuja tehtäviä yhteensä:** merkitse lukumäärä ruutuun

1. Opettajan työssä tulee toistuvasti vastaan tarve laatia opetusmoniste tai koe, johon täytyisi liittää kuva. Useimmat tällaiset kuvat voidaan piirtää GeoGebralla, siirtää yhdellä komennolla leikepöydälle ja liittää sieltä osaksi tekstinkäsittelyohjelmalla (esim. Word) laadittua dokumenttia. GeoGebralla piirretyn kuvan voi tallentaa paitsi ggb-tiedostona myös kuvatiedostona.

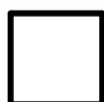
- (a) Piirrä viereinen kuva GeoGebralla.  
(b) Vie kuva leikepöydän kautta osaksi tekstitiedostoa.  
(c) Tallenna kuva pdf-kuvatiedostoksi.



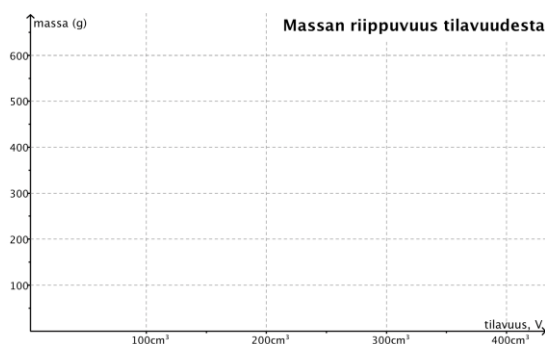
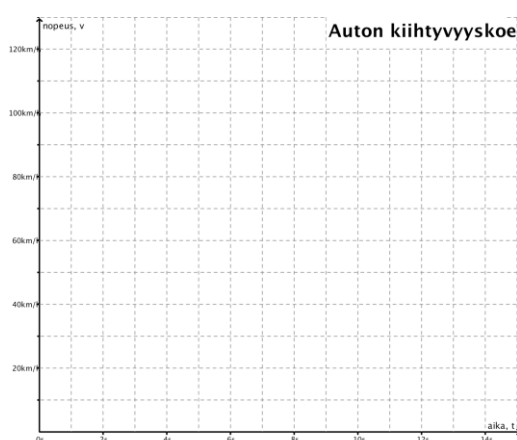
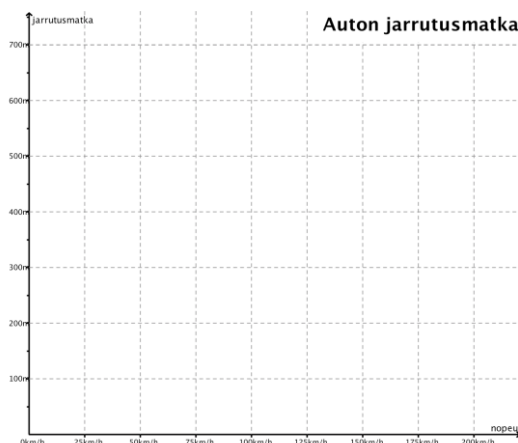
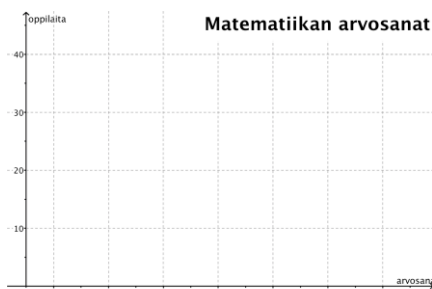
2. Tutustu näkymän asetuksiin: selvitä, miten saat
- (a) muutetuksi tekstifontin kokoa suuremmaksi (opetuksessa tärkeä asetus),  
(b) muutetuksi pyöristystarkkuutta,  
(c) kulmayksikköä muutetuksi (asteet/radiaanit),  
(d) syöttökentän näkyville ja piiloon,  
(e) siirretyksi syöttökentän ikkunan ylälaitaan,  
(f) muokattua työvälinepalkkia: sen paikkaa, työvälineiden järjestystä ja käytettävissä olevien työvälineiden määrää.

3. Tutustu piirtoalueen asetuksiin: selvitä, miten saat
- (a) koordinaattiakselit ja -ruudukon näkyville ja piilotetuksi,  
(b) koordinaattiakselit lihavoiduksi ja taustan värin vaihdetuksi,  
(c) ruudukon tummemmaksi (opetuksessa ja tulostuksessa tärkeä asetus),  
(d) muutetuksi origon paikkaa ja muutetuksi akselien välistystä.

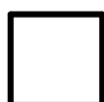
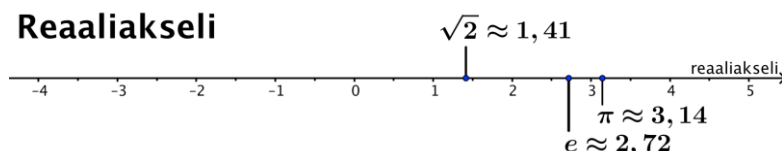
Nimi: \_\_\_\_\_



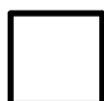
4. Graafinen esitys on erinomainen tapa havainnollistaa suureiden välisiä kokeellisia tai teoreettisia riippuvuuksia sekä mittaustuloksia. Tutustumme esimerkkeihin kurssin tulevilla viikolla. Olipa käyttötarkoitus mikä hyvänsä, koordinaattiakselit on muistettava nimetä. Molemmille akseleille on myös merkittävä selvästi näkyviin käytetty asteikko yksikköineen. Tällä viikolla tehtävänäsi on selvittää, miten koordinaatiston asetuksia muuttamalla saadaan seuraavat 5 tilannetta:



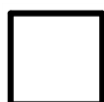
**Reaaliakseli**



5. Piirrä funktioiden kuvaajia: selvitä, millä syöttökentän komennoilla saat piirretyksi
- rationaalifunktioita,
  - funktioita, joiden lausekkeessa esiintyy itseisarvo,
  - neliöjuuri- ja kuutiojuurifunktiot sekä yleisen juurifunktion,
  - eksponenttifunktion  $f(x) = e^x$  sekä muut eksponenttifunktiot,
  - logaritmifunktion  $f(x) = \ln x$  muut logaritmifunktiot,
  - trigonometriset funktiot.



6. Tutustu syöttökentän kautta annettaviin komentoihin *Funktio[]* sekä *Jos[]*:
- Piirrä jokin funktio, jonka määrittelyjoukko ei ole koko reaalinlukujen joukko.
  - Piirrä jokin paloittain (vähintään kahdella eri lausekkeella) määritelty funktio.

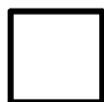


7. Luo sovelma, joka havainnollistaa jotakin funktioluokkaa. Hyödynnä *Liuku*-kytkintä tai *Tekstikenttä*-työvälinettä. Valitse jokin seuraavista:

- \* kertoimien  $a$ ,  $b$  ja  $c$  vaikutus 2. asteen polynomifunktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  kuvaajaan,
- \* kantaluvun  $k$  vaikutus eksponenttifunktion  $f(x) = k^x$  ja logaritmifunktion  $f(x) = \log_k x$ ,
- \* vakioiden  $A$  ja  $b$  vaikutus trigonometrisen funktion  $f(x) = A \sin x + b$  tai  $g(x) = A \cos x + b$  arvoihin (suurimpiin ja pienimpiin arvoihin).

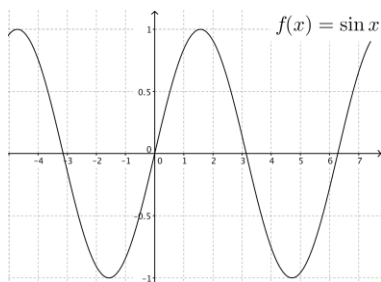
Millä tavalla luulet parametrien dynaamisen tutkimisen vaikuttavan oppimiseen?

Nimi: \_\_\_\_\_



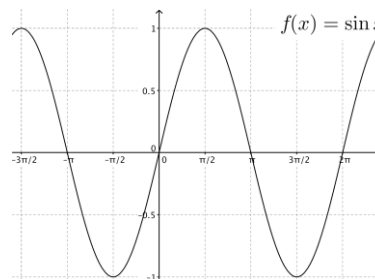
8. Trigonometrisessa funktiossa muuttujana voi olla *kulma* (peruskoulu, kulman yksikkönä aste) tai *reaaliluku* (lukio, kulman yksikkönä radiaani).

Tutki, miten saat aikaan seuraavat kolme tilannetta.

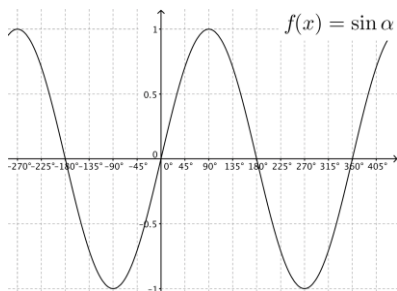


**Tilanne 1** (vasemmalla): sinifunktio, muuttuja  $x$  on reaaliluku, vaaka-akselilla asteikon väli on 1.

**Tilanne 2** (alla): sinifunktio, muuttuja  $x$  on reaaliluku, vaaka-akselilla asteikon väli on  $\pi/2$  (eli noin 1,57)

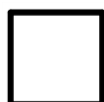


**Tilanne 3** (alla): sinifunktio, muuttuja  $\alpha$  on kulma, vaaka-akselilla yksikkönä on aste ja väli on  $45^\circ$



9. *Johdanto GeoGebraan 3.0* -opaskirjan **Harjoitus II.c (s. 35)** eli **Funktiodomino**. Linkin opaskirjaan löydät kurssisivulta.

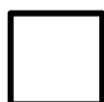
- \* Älä käytä kaavaeditoria (opaskirjan ohjeessa kohta 6) funktion määritelmän (lausekkeen) kirjoittamiseen vaan kirjoita määritelmä GeoGebrassa ABC-tekstityövälineellä.
- \* Voit joko seurata monisteen ohjeita tai halutessasi keksiä omat "dominokorttiparit". Korttisi voivat olla *kuvaaja–lauseke* -pareja tai vaikkapa *funktion kuvaaja–derivaattafunktion kuvaaja* -pareja.
- \* Luo vähintään viisi paria.



10. Tutustu *Satunnaisluku[min,max]*-komentoon:

- luo kaksi satunnaista (kokonais)lukua  $k$  ja  $b$  (saat päättää itse vaihteluvälin)
- piirrä suora  $y = kx + b$ , jonka kulmakerroin  $k$  määräytyy toisesta satunnaisluvusta ja vakio  $b$  toisesta
- paina `ctrl-R` tai `F9` (mac: `cmd-R`): tämä päivittää luvuille uudet arvot
- lisää sopiva otsikkoteksti, esimerkiksi *Mikä on suoran kulmakerroin?* tai *Mikä on suoran yhtälö?*
- upota oikea vastaus ABC-tekstiin ja piilota teksti valintaruudun taakse
- millä pienellä lisäyksellä saat kulmakertoimeksi rationaaliluvun?

Ehosta sovelmaasi: lisää suoran ja  $y$ -akselin leikkauspiste ja yhdistä se janalla origoon. Muuta janan väriä ja paksuutta ja ota sen arvo (pituus) esille. Käytä *Kulmakerroin*-työvälinettä tai `-`komentoa luodaksesi suoralle "apukolmion". Piilota kaikki ylimääräiset pisteet, jotka eivät havainnollistuksen kannalta ole oleellisia.

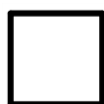


11. Kun käytetään *Kulmakerroin*-työvälinettä tai *Kulmakerroin[]*-komentoa suoran kulmakertoimen laskemiseksi, suoralle ilmestyy automaattisesti apukolmio, jonka sijainti on määrätty ja jonka kanta on aina yhden yksikön mittainen. Tällainen apukolmio ei aina ole tilanteeseen sopiva. Piirrä suora ja rakenna itse apukolmio, jonka kokoa voidaan säätää. Suunnittele itse, säädetäänkö kolmion kantaa vai korkeutta.

Nimi: \_\_\_\_\_

12. Toisinaan on hyödyllistä pystyä säätämään polynomifunktion nollakohtia.
- Lisää  $x$ -akselille kolme pistettä ( $A$ ,  $B$  ja  $C$ ).
  - Määrittele syöttökentän kautta polynomifunktio  $f$ , jolla on mainitut kolme nollakohtaa:  $f(x) = a \cdot (x - x(A)) \cdot (x - x(B)) \cdot (x - x(C))$
  - Kirjain  $a$  on määrittelemätön muuttuja, joten GeoGebra kysyy “Luodaanko liukusäätimet?” Valitse: Luo.
  - Pystyt säätämään funktion  $f$  nollakohtia sekä kerrointa  $a$ . Näin löytyy esimerkiksi sopivia esimerkkejä harjoitus- ja koetehtäviin.
  - Kokeile syöttökentän kautta komentoja `PoistaSulut[f]` ja `Sievennä[f]`
13. Koulumatematiikasta tiedämme, että 2. asteen polynomifunktion  $p(x) = x^2 + cx + d$  nollakohdilla ja tekijöillä on yhteys. Erityisesti, jos  $-a$  ja  $-b$  ovat polynomien  $p$  nollakohdat, niin  $p(x) = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ .  
Siis: polynomien  $p$  kertoimilla ja nollakohdilla on seuraava yhteys:  $c = a + b$  ja  $d = ab$ . Käytä tätä havaintoa hyväksesi ja luo sovelma, jolla käyttäjä voi harjoitella polynomien jakamista tekijöihin. Hyödynnä `Satunnaisluku[]`-komentoa nollakohtien määrittelemiseksi. Katso tarkemmat ohjeet *An Introduction to GeoGebra* –oppaasta sivuilta 44-47. Sinun ei tarvitse välittää oppaan ohjeista 12-14. Sivulla 47 ohjeen 4 komento on suomeksi `Sievennä[f]`. Linkin oppaaseen löydät kurssin kotisivulta.
14. Annan oppilaat tutkivat parametrin  $k$  vaikutusta funktion  $f(x) = x^2 + kx + 1$  kuvaajaparaabeliin. He huomasivat, että paraabelin *huippupiste* piirtää aivan erityistä rataa parametrin arvon vaihdeltaessa. Tätä lähdettiin tutkimaan tarkemmin: paraabelin huippupiste merkittiin näkyviin (sopivalla syöttökentän komennolla) ja huippupisteelle otettiin jälki käyttöön. Huomattiin, että huippupisteen radalla on läheinen yhteys siihen paraabeliin, jossa parametri  $k$  saa arvon  $k = 0$ . Tätä yhteyttä tutkittiin vielä tarkemmin lisäämällä paraabelille piste ja peilaamalla se erään suoran suhteen. Tutkimusten perustellaan tehtiin hypoteesi huippupisteen piirtämästä radasta. Hypoteesi testattiin syöttämällä radan yhtälö syöttökenttään.
- Toista oppilaiden tutkimukset.
  - Minkä käyrän huippupiste piirtää?
15. Luo havainnollistus, jonka avulla voidaan tutkia miten siniaallon  $f(x) = A \sin(kx + \omega)$  amplitudi  $A$ , taajuus  $k$  ja vaihe  $\omega$  vaikuttavat aallon muotoon. Hyödynnä *Liuku-työvälinettä*.  
Vapaaehtoinen jatko-harjoitus: *Johdanto GeoGebraan* –opaskirjan sivun 29 harjoitus (siniaaltojen interferenssi). Linkin opaskirjaan löydät kurssisivulta.
16. Havainnollista trigonometristen funktioiden määritelmiä yksikköympyrässä. Voit valita yhden funktion (sini/kosini/tangentti) tai havainnollistaa niitä kaikkia.  
*Katso tarvittaessa apua ja ideoita:*  
\*geogebraTube: <http://tube.geogebra.org/> ja hakusanaksi vaikka “sinifunktio” tai “yksikköympyrä”  
\*Korhosen, Luoma-ahon ja Rahikan *GeoGebra opas*: Luvun 12 Harjoitukset 47 ja 48. Linkin oppaaseen löydät kurssin kotisivulta.
17. Tutki funktiota  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kun } -3 \leq x < a \\ 2x - 1, & \text{kun } a \leq x \leq 6 \end{cases}$
- Luo sovelma, jossa vakion  $a$  arvoa voidaan säätää. Selvitä, millä vakion  $a$  arvolla funktio on jatkuva. Funktiota  $f$  piirtämiseksi, katso tarvittaessa apua *An Introduction to GeoGebra* –oppaan sivulta 51.

Nimi: \_\_\_\_\_



18. Tee “funktio-kone”: piirtoalueella on tekstikenttä, johon käyttäjä voi syöttää muuttujan  $x$  arvon; vastaava funktion arvo päivittyy enterin painalluksen jälkeen ABC-tekstiin. Käyttäjän (oppilaan) tehtävänä on päätellä funktion “sääntö”, eli lauseke. Painikkeet muuttavat funktion sääntöä (saat valita itse funktiot, tee vähintään kaksi tehtävää). Oikea vastaus on piilossa *tarkista!* -valintaruudun takana.

Funktio-koneen kuvaa ei tarvitse piirtää. Opimme myöhemmin lisäämään kuvia piirtoalueelle.

**Päättele funktion sääntö!**

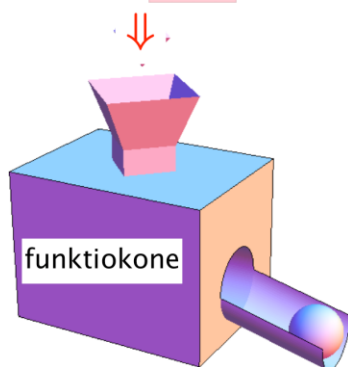
tehtävä 1

tehtävä 2

tehtävä 3

tehtävä 4

muuttujan arvo on  $x=1$

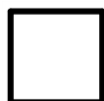


$$f(x) = 2x \quad \checkmark \text{ tarkista!}$$

$$\Rightarrow f(1) = 2$$



19. (a) Selvitä kuvaajan perusteella yhtälön  $\sin(x^2) = 2x$  juuret. Tutki kuvaajan avulla funktiota  $(x) = \frac{\sin(4x)+5x}{\sin(x^2)-2x}$ ;  
(b) Millä muuttujan arvoilla funktio on määritelty? (Vertaa (a)-kohta.)  
(c) Onko funktiolla  $f$  raja-arvoa kohdassa  $x = 0$ ? Miten se näkyy kuvaajasta?



20. Harjoittele *automaattisen animaation* lisäämistä. Piirrä ns. *topologin sinikäyrä*  $\{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$ .
- Lisää käyrälle piste  $A$ .
  - Klikkaa pisteen päällä hiiren oikealla ja valitse *Animaatio valittuna*. Huomaa, että piirtoalueen vasempaan alalaitaan ilmestyy “pause”-nappula. Laita animaatio tauolle. Animaatio voidaan lisätä mille hyvänsä *riippuvalla* pisteelle, joka on rajoitettu jollekin objektille (janalle, suoralle funktion kuvaajalle, jne)
  - Mene pisteen *Ominaisuuksiin* – *Algebra*-välilehdelle: muuta animaatioaskeleeksi 0,0001 ja toistoksi edestakainen.
  - Lisää käyrälle pisteeseen  $A$  tangentti. Tarkkaile tangentin kulmakerrointa kun piste vilistää käyrällä animaation ollessa päällä.