

Nimi: _____

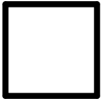
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos (opettajankoulutus)
GeoGebra opetuksessa
Kevät 2015
Viikko 11 (ma 9.3. ja ke 11.3.)

Työviikko 1 Geometriaa ja analyttistä geometriaa

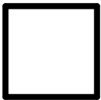
Ohjeet harjoitustehtävien tekemiseen ja palauttamiseen:

- * Käytä tehtävien ratkaisemiseen GeoGebraa.
- * Kun olet ratkaissut tehtävän – ja olet valmis esittämään sen ryhmälle, merkitse tehtävän vasemmalla puolella olevaan ruutuun $\boxed{1}$.
- * Jos ratkaisit tehtävästä osan (esimerkiksi puolet alakohdistista) tai et saanut ratkaisua loppuun saakka, merkitse ruutuun $\boxed{1/2}$.
- * Laske lopuksi tekemiesi tehtävien kokonaismäärä ja merkitse pisteet ensimmäiseen ruutuun. Puolikkaista tehtävistä saat puolikkaita pisteitä.
- * Aikaa tehtävien ratkaisemiseen on viikko: palauta tämä tehtäväpaperi viimeistään ensi viikon maanantaina ryhmätapaamisen alkaessa.
- * Ei ole välttämätöntä tallentaa jokaisen tehtävän työtiedostoa. Muistathan kuitenkin, että pisteen merkitseminen edellyttää, että olet valmistautunut esittämään ratkaisun ryhmälle.

Tehtävänannoissa *konstruoiminen* tarkoittaa, että rakennetaan (konstruoidaan) säännöllinen kuvio, jonka kokoa voidaan muuttaa kärkipisteitä (tai muita osia) liikuttamalla kuitenkin niin, että kuvion säännöllisyys säilyy.



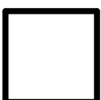
Tällä työviikolla ratkaistuja tehtäviä yhteensä: merkitse lukumäärä ruutuun



1. Piirrä suora.
 - (a) Lisää piste P suoralle ja piste Q sen ulkopuolelle.
 - (b) Piirrä suoran kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee (a)-kohdan pisteen Q kautta.
 - (c) Piirrä suoraa vastaan *kohtisuora* suora (normaali), joka kulkee (a)-kohdan pisteen P kautta.
 - (d) Selvitä kaikkien suorien kulmakertoimet (likiarvot).

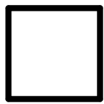


2.
 - (a) Havainnollista kehäkulmalauseetta: *ympyrän kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta, ja samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat siis keskenään yhtä suuret.*
 - (b) Tutki, mikä kuvio muodostuu, kun nelikulmion sivujen keskipisteet yhdistetään uudeksi nelikulmioksi.

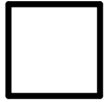


3. Piirrä ympyrä, jonka säde on 5.
 - (a) Lisää ympyrän kehälle kaksi pistettä ja yhdistä ne keskipisteeseen janoilla.
 - (b) Mittaa kehäpisteitä vastaavan keskuskulman suuruus.
 - (c) Mittaa kehäpisteitä vastaavan kaaren pituus.
 - (d) Mittaa vastaavan ympyräsektorin pinta-ala.
 - (e) Mittaa vastaavan ympyräsegmentin pinta-ala.

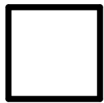
Nimi: _____



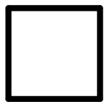
4. Piirrä säännöllisiä kolmioita. Voit hyödyntää koordinaatistoa pyydetyn säännöllisyyden aikaansaamiseksi.
- (a) *Pythagoraan kolmio*: suorakulmainen kolmio, jonka sivut ovat 3,4 ja 5; korosta suoraa kulmaa suoran kulman merkillä ja ota sivunpituudet esille.
- (b) *Muistikolmiot*: suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituus on 1 ja suorakulmainen kolmio, jonka toisen kateetin pituus on 1 ja hypotenuusan pituus on 2; merkitse sivunpituuden ja kulmien suuruudet näkyviin. Vie kuvat osaksi tekstitiedostoa (esim. Word-tiedostoon).



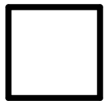
5. Konstruoi säännöllisiä kolmioita:
- (a) *Tasakylkinen kolmio* jonka kylkien pituus on 3; korosta yhtä pitkiä kylkiä koristelulla. Tutki, millä välillä kannan pituus vaihtelee.
- (b) *Tasasivuinen kolmio* jonka sivunpituus on 3. Ota kulmien suuruudet esille.



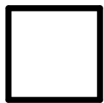
6. Piirrä kolmio.
- (a) Piirrä kolmion ympäri ympyrä. Hyödynnä valmista työvälinettä.
- (b) Konstruoi kolmion ympäri ympyrä. *Älä siis käytä* valmista työvälinettä.



7. Havainnollista kolmion kulmien summalausetta: *kolmion kulmien summa on oikokulma* 180° .



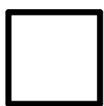
8. Konstruoi suorakulmio, jonka sivunpituuksia voidaan muuttaa kärkipisteitä liikuttelemalla kuitenkin niin, että piiri pysyy vakiona, $p=16$.



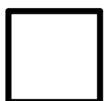
9. Olkoon O origo ja $A(5,0)$. Merkitse negatiiviselta x -akselilta piste P . Piirrä x -akselin alapuolelle neliö $OPBC$ ja x -akselin yläpuolelle neliö $APED$. Tutki janoja, joiden toinen päätepiste on ensin piirretyn neliön oikea alakulma ja toinen päätepiste on jälkimmäisen neliön oikea yläkulma. Osoita tutkimalla, että kaikilla näin saaduilla janoilla on sama keskipiste. (Täsmällistä todistusta ei tarvita.)



10. (a) Kolmion kärkipisteet ovat $A(-2,5)$, $B(-2, -1)$ ja $C(4,3)$. Laske kärjestä A piirretyn kolmion keskijanan (*mediaanin*) pituus.
- (b) Janan toinen päätepiste on $(-2,4)$ ja keskipiste on $(1,3)$. Määritä janan toinen päätepiste ja pituus (likiarvo riittää).



11. Selvitä, mitä tason pistejoukkoa yhtälö/epäyhtälö esittää.
- (a) $xy + y^2 = 0$. Tutki kuuluvatko pisteet $(7, -7)$ ja $(-15,0)$ pistejoukkoon.
- (b) $4x^2 - y^2 = 0$
- (c) $xy - 4x + y = 4$
- (d) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$
- (e) $2x^2 + y^2 = 8$
- (f) $x^4 - x^2 + y^2 = 0$
- (g) $x^2 - y > 0$. Lisää liikuteltava piste pistejoukkoon.
- (h) $x^2 + y^2 - 2y - 3 \geq 0$
- (i) $xy \leq 2$



12. Geometrisen määritelmänsä mukaan, *paraabeli* on niiden tason pisteiden joukko, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: piste on yhtä etäällä kiinteästä pisteestä (*polttopiste*) ja kiinteästä suorasta (*johtosuora*).
- (a) Selvitä paraabelin $y = x^2 + 3x + 4$ polttopiste ja johtosuora.
- (b) Paraabelin polttopiste on $(1,2)$ ja johtosuora on $y = 1$. Selvitä paraabelin yhtälö ja huippupisteen koordinaatit.

Nimi: _____

13. (a) Tutki, millä vakion a arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - 2 = 0$ esittää ympyrää. Mikä on ympyrän keskipiste? Hyödynnä *Liuku*-toimintoa.
(b) Tasossa on kaksi pistettä, joiden kautta jokainen ympyräparven ympyrä kulkee. Selvitä, mitkä nämä kaksi pistettä ovat.
(c) Piirrä kuva ympyräparvesta $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - 2 = 0$. Hyödynnä *Jälki*-toimintoa. Kuva auttaa myös (b)-kohdassa.

14. (a) Piirrä kaksi ympyrää, joista toisen keskipiste on origo ja säde 5 ja toisen keskipiste on $(6, -3)$ ja säde $\sqrt{10}$. Määritä ympyröiden leikkauspisteet.
(b) Ympyrälle $x^2 + y^2 = 5$ piirretään pisteen $(-1, 3)$ kautta kulkevat tangentit. Määritä tangenttien yhtälöt. (Neliöjuuren komento on $\text{sqrt}(10)$.)

15. Laske sen kolmion pinta-ala, jonka rajaavat suorat $y = x + 10$ ja $y = -3x - 6$ sekä (a) y -akseli, (b) x -akseli.

16. (a) Selvitä ympyröiden $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 26 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 16y = 0$ keskipisteet.
(b) Suora kulkee ympyröiden $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 26 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 16y = 0$ keskipisteiden kautta. Määritä suoran kulmakerroin (tarkka arvo!) Hyödynnä *Murtolukuteksti*-komentoa.

17. (a) Tutki, millä vakion k arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$ esittää ympyrää. Hyödynnä *Liuku*-toimintoa!
(b) Mikä on ympyrän keskipiste ja säde?
(c) Piirrä ympyräparven $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$ ympyröitä niin monella vakion k arvolla, että saat ympyräparvesta havainnollisen kuvan. Hyödynnä *Jälki*-toimintoa.

18. Kuminauhan toinen pää on origossa ja nauhan toinen pää liikkuu pitkin käyrää $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$. Tutki, minkä käyrän kuminauhan keskipiste piirtää. Hyödynnä *Jälki*-toimintoa.

19. Janan pituus on 6 ja sen päätepisteet liikkuvat ympyrällä $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$. Tutki, minkä käyrän janan keskipiste piirtää.

20. Selvitä ne suoran $y = x + 3$ pisteet, joista origoa ja pistettä $(0, 5)$ yhdistävä jana näkyy suorassa kulmassa.