FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT / SRPING 2015
LASKUHARJOITUS / EXERCISE 8

1($*$). Olkoon $\Omega =]-10,10[$. Osoita, että Sobolev-avaruudessa $H^1(\Omega)$ normit

$$\|f\|_A := \Big(\int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} + \Big(\int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

$$\|f\|_B := \max \Big\{ \Big(\int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2}, \Big(\int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \Big\}$$

ovat ekvivalentteja tavanomaisen normin $\big(\int_{-10}^{10} |f|^2 + \int_{-10}^{10} |f'|^2 \big)^{1/2}$ kanssa. Osoita, että funktio $f(x) = 5|x| - x^2$ kuuluu avaruuteen $H^1(\Omega)$ tutkimalla sen heikkoa derivaattaa.

2. Sobolev-avaruudet $W^{1,p}(\Omega)$ voidaan määritellä kuten avaruus $H^1(\Omega)$, kun $\Omega =]a,b[$ ja $1 \leq p < \infty$: määritelmässä vain korvataan L^2-tyyppiset normit vastaavilla L^p-normeilla. Esitä määritelmän yksityiskohdat. (Huom. $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.)

3($*$). Osoita, että tehtävän 2 Sobolev-avaruudet ovat täydellisiä. Voit pitää tunnettuna, että $L^p(\Omega)$ on täydellinen.

4. Osoita, että vakiofunktiota 1 ei voida approksimoida mielivaltaisen hyvin (kompaktikantajaisella C^∞-) testifunktiolla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avaruudessa $H^1(\Omega)$, $\Omega =]0,1[$: on olemassa vakio $\delta > 0$, jolle

$$\|1 - \varphi\|_{H^1} \geq \delta \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vihje. Saattaa olla helpompaa osoittaa asia ensin avaruudessa $W^{1,1}(\Omega)$.

****

1($*$). Let $\Omega =]-10,10[$. Show that in the space $H^1(\Omega)$, the following norms

$$\|f\|_A := \Big(\int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} + \Big(\int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

$$\|f\|_B := \max \Big\{ \Big(\int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2}, \Big(\int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \Big\}$$

are equivalent with the usual norm $\big(\int_{-10}^{10} |f|^2 + \int_{-10}^{10} |f'|^2 \big)^{1/2}$. Show that the function $f(x) = 5|x| - x^2$ belongs to $H^1(\Omega)$ by studying the weak derivative of f.

2. The Sobolev spaces t $W^{1,p}(\Omega)$ can be defined in the same way as $H^1(\Omega)$, for $\Omega =]a,b[$ and $1 \leq p < \infty$: the L^2-type norms must be replaced by the corresponding L^p-norms. Present the details of the definition. (Remark. $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.)

3($*$). Prove that the Sobolev-spaces of Problem 2 are complete. You may assume to be known that $L^p(\Omega)$ is complete.

4. Show that the constant function 1 cannot be approximated arbitrarily well by (compact support C^∞-) test functions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ in the space $H^1(\Omega)$, $\Omega =]0,1[$: there exists a constant $\delta > 0$ such that

$$\|1 - \varphi\|_{H^1} \geq \delta \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Instruction. It may be easier to prove this first in the space $W^{1,1}(\Omega)$.